

Universitetet i Tromsø



Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-1003, Kalkulus-3
Eksamensdag:	Tirsdag 24 Februar 2004
Eksamenstid:	Kl. 09.00-13.00
Eksamenssted:	Samvirkegården, 4. etg.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, formelsamling og to egne A4-ark (4 sider)
Oppgavesettet:	Totalt på 2 sider
Kontaktperson:	Professor <i>Boris Kruglikov</i> , tlf. 776 44 779
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I

La $f(x, y, z) = x^2 + 2yz + z^2 - 2y + 2z$ og $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$.

1. Finn og klassifiser alle lokale ekstremalpunkter til funksjonen f på $\mathbb{R}^3$. Finn alle globale ekstremalpunkter (maksima og minima) hvis de eksisterer.
2. Ved bruk av teori for Lagrange multiplikatorer, beregn alle kritiske punkter tilhørende funksjonen f for problemet med føringen $g = 0$. Bruk annenderivat-testen for å bestemme hvilke som er ekstremalpunkter.
3. Finn globale ekstremalpunkter og maksimums- og minimumsverdiene til f i lukkede område

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq 3\}.$$

4. Ved bruk av kjerneregelen (chain rule), beregn annenderivatet h_{xx} til funksjonen $h(x, y, z) = H(f(x, y, z), g(x, y, z))$. Her $H(u, v)$ er en glatt funksjon.

Oppgave II

La $\bar{F} = (x^2 - y^2 + y - 1, \varepsilon xy + x + 1)$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^2$. La $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$, $D = (0, -1)$ være punkter på enhetssirkelen $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.

1. Beregn og sammenlign de følgende sirkulasjon-integralene: $\oint_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{s}$ og $\oint_{\gamma_2} \bar{F} \cdot d\bar{s}$. Her er veien γ_1 det lukkede polygontrekk $ABCD A$ og $\gamma_2 = \mathbf{S}^1$, begge orientert mot klokka.
2. Finn for hvilke verdier av ε vektorfeltet $\bar{F}$ er konservativt og beregn et skalarpotensial for disse parameterverdiene. Beregn da sirkulasjon-integralene fra siste oppgave for disse vierdiene av ε på en annen måte. For andre parameterverdier sammenlign integralene $\int_{\bar{\gamma}_i} \bar{F} \cdot d\bar{s}$ langs den ene halvdelen $\bar{\gamma}_1 = ABC$ av overnevnte veien γ_1 og halvsirkelen $\bar{\gamma}_2 \subset \gamma_2$ fra punktet A til C gjennom B .
3. Bekreft ved utregning Green's formelen for $\bar{F}$ i det trekantet området $ABC \subset \mathbb{R}^2$.

Oppgave III

La $C = \{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 3\}$ være en delmengde av kjeglen i $\mathbb{R}^3$. Betrakte vektorfeltet $\bar{F} = (x^2 + z, -2x + 3z, 2x + y - z^2)$.

1. Vis at flaten C er glatt regulær med unntagelse av i origo $0 \in \mathbb{R}^3$. Beregn ligningen til tangentplanet $T_a C$ i punktet $a = (3, -4, 5) \in C$.
2. La C være orientert med nedoverpekende normal. Induser orientering på grensenssirkelen ∂C og beregn $\oint_{\partial C} \bar{F} \cdot d\bar{s}$.
3. Beregn $\text{curl}(\bar{F})$ og bekreft ved utregning Stokes' formelen for $\bar{F}$ i flaten C .