EKSAMENSOPPGAVE I MAT-1003

Eksamen i	:	**Mat-1003**
Dato	:	**Onsdag 28 november 2007**
Tid	:	**Kl 0900 – 1300**
Sted	:	**Åsgårdveien 9**
Tillatte hjelpemidler	:	**Rottmanns tabeller**
		To A4-ark (4 sider) med egne notater
		Godkjent Kalkulator

Oppgavesettet er på 3 sider inkl. forside

Kontaktperson: Martin Rypdal tlf: 77644012

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

I dette oppgavesettet teller oppgavene 1 til 4 like mye.

Oppgave 1 **a)** Formuler teoremet for variabelbytte i dobbeltintegraler. Husk å spesifisere under hvilke betingelser teoremet gjelder.

b) La D være parallellogrammet i $\mathbb{R}^2$ med hjørner i punktene $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}), (0, \pi), (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ og $(0, 0)$. Tegn opp området D og beregn dobbeltintegralet

$$\int\int_D (2x + y)\cos(2x - y)dxdy$$

Oppgave 2 La S være en flate parametrisert ved

$$\begin{aligned} x &= (a + t^2)\cos(s) \\ y &= (a + t^2)\sin(s) \qquad\qquad (s, t) \in [0, 2\pi) \times [0, b] \\ z &= t \end{aligned}$$

hvor a og b er positive konstanter.

a) Finn en kartesisk ligning for S, d.v.s en funksjon $f(x, y, z)$ slik at flaten er bestemt av $f(x, y, z) = 0$, samt variasjonsområde for x, y og z. Skisser så flaten og beskriv betydningen av parametrene a og b.

b) La $a = 1$ og anta $b > 1$. Vis at S er glatt i punktet $p = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Finn tangentplanet til S i p ved å ta utgangspunkt i parametriseringen.

c) Finn en formel for arealet av S ved å benytte flateintegrasjon. Formelen vil avhenge av a og b.(Hint: Substitusjon med hyperbolske funksjoner er nyttig her.)

d) La T være et område i rommet med rand ∂T. Anta at T og ∂T oppfyller betingelsene i Gauss teorem. Vis at volumet av T kan beregnes ved følgende flateintegral

$$V = \int\int_{\partial T} \underline{F} \cdot d\underline{S}$$

hvor $\underline{F}(x, y, z) = xe_x + ye_y$.

e) La T være området bestemt av S og planene $z = 0$ og $z = b$. Beregn volumet av T.

Oppgave 3 La S være området i planet mellom sirkelen med radius 2 og kvaderatet med hjørner i punktene $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ og $(1, -1)$.

a) Finn et vektorfelt i planet som er slik at $\nabla \cdot \underline{F} = 1$.

b) Vis at arealet av S kan skrives som

$$A = \int_{\partial S} \underline{F} \cdot \underline{n} ds$$

hvor $\underline{n}$ er enhetsnormalen til ∂S som peker ut av S , og bruk denne formelen til å beregne A.

c) La $\underline{G}$ være vektorfeltet

$$\underline{G}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}e_x + \frac{x}{x^2 + y^2}e_y$$

La C^+ være en vilkårlig enkel lukket glatt kurve C i S som er orientert mot klokka . Vis at

$$\int_{C^+} \underline{G} \cdot \underline{ds} = 2\pi$$

Oppgave 4 La V være vektorrommet av kontinuerlige funksjoner på intervallet $[-1, 1]$ med indreprodukt definert ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

og la W være underrommet spent ut av $B = \{e^x, e^{-x}\}$.

a) Vis at B er en basis for W og bruk Gram-Schmidt til å generere en orthogonal basis.

b) Finn den beste tilnærming til funksjonen e^{2x} i W.