EKSAMENSOPPGAVE MAT-1005

(BOKMÅL)

Eksamen i	**:**	**Mat-1005 Diskret matematikk 1.**
Dato	**:**	**Fredag 14. desember.**
Tid	**:**	**09.00 - 13.00.**
Sted:	**:**	**Åsgårdveien 9.**
Tillatte hjelpemidler	**:**	**Godkjent kalkulator,**
		to A4 ark egne notater og
		Rottmanns tabeller.

Oppgavesettet er på 4 sider eks. forside, og inneholder 11 deloppgaver: 1, 2abc, 3abc, 4abcd.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

EKSAMENSOPPGÅVE MAT-1005

(NYNORSK)

Eksamen i	:	**Mat-1005 Diskret matematikk 1.**
Dato	:	**Fredag 14. desember.**
Tid	:	**09.00 - 13.00.**
Sted:	:	**Åsgårdvegen 9.**
Tillatne hjelpemiddel	:	**Godkjent kalkulator,**
		to A4 ark eigne notat og
		Rottmanns tabellar.

Oppgåvesettet er på 4 sider eks. forside, og inneheld 11 deloppgåver: 1, 2abc, 3abc, 4abcd.

Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 93 67 58 32.

Begrunn svarene dine, vis fremgangsmåte ved oppgaveløsningen tydelig!

1 OPPGAVE

Undersøk om de to logiske utsagnene (*the two propositions)*

$$p \longrightarrow (q \wedge r)$$

og

$$(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$$

er logisk ekvivalente.

2 OPPGAVE

a) Beregn den inverse til 37 modulo 140.

b) Finn alle heltallsløsninger x, $0 \leq x \leq 1000$, til kongruensen

$$37x \equiv 29 (\text{mod}\, 140).$$

c) Finn alle heltallsløsninger x, $0 \leq x \leq 1000$, til systemet av kongruenser

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\text{mod}\, 4) \\ x \equiv 3 (\text{mod}\, 5) \\ x \equiv 5 (\text{mod}\, 7) \end{cases}$$

Gi grunn for svara dine, vis framgangsmåte ved oppgåveløysinga tydeleg!

1 OPPGÅVE

Undersøk om dei to logiske utsegnene *(the two propositions)*

$$p \longrightarrow (q \wedge r)$$

og

$$(p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$$

er logisk ekvivalente.

2 OPPGÅVE

a) Rekn ut den inverse til 37 modulo 140.

b) Finn alle heltalsløysingar x, $0 \leq x \leq 1000$, til kongruensen

$$37x \equiv 29 (\mathrm{mod}\, 140).$$

c) Finn alle heltalsløysingar x, $0 \leq x \leq 1000$, til systemet av kongruensar

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 5) \\ x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 7) \end{cases}$$

3 OPPGAVE

I et øyland Stillehavia består bilskiltene av en streng av siffer med vilkårlig lengde. Men, siden stillehaverne ikke liker tallet **13**, er det ikke tillatt at sifferet 3 etterfølger sifferet 1 i bilskiltene deres. Nedenfor er eksempler av tillatte bilskilter:

01143333
2221437123
012355

og forbudte bilskilter:

0513003
2221367132
012135135

La a_n være antallet tillatte bilskilter av lengde n.

a) Beregn a_6.

Hint: La b_6 være antall **forbudte** bilskilter. Finn først $a_6 + b_6$. Beregn deretter b_6 på følgende måte. La S_{13****} være mengden av bilskilter av lengde 6, som har 13 i begynnelsen. La deretter S_{*13***} være mengden av bilskilter som har 1 på 2. plass, og 3 på 3. plass. Definer analogisk

S_{**13**},
S_{***13*},
S_{****13}.

Finn

$$b_6 = |S_{13****} \cup S_{*13***} \cup S_{**13**} \cup S_{***13*} \cup S_{****13}|$$

ved hjelp av inklusjon-eksklusjon prinsippet.

3 OPPGÅVE

I eit øyland Stillehavia består bilskiltene av ein streng av siffer med vilkårleg lengde. Men, sidan stillehaverne ikkje liker talet **13**, er det ikkje tillatt at sifferet 3 etterfølg sifferet 1 i bilskiltene. Nedanfor er eksempler av tillatne bilskilter:

01143333
2221437123
012355

og forbodne bilskilter:

0513003
2221367132
012135135

La a_n vere talet tillatne bilskilter av lengde n.

a) Rekn ut a_6.

Hint: La b_6 vere talet **forbodne** bilskilter. Finn først $a_6 + b_6$. Rekn ut deretter b_6 på følgjande måte. La S_{13****} vere mengda av bilskilter av lengde 6, som har 13 i starten. La deretter S_{*13***} vere mengda av bilskilter som har 1 på 2. plass, og 3 på 3. plass. Definer analogisk

S_{**13**},
S_{***13*},
S_{****13}.

Finn

$$b_6 = |S_{13****} \cup S_{*13***} \cup S_{**13**} \cup S_{***13*} \cup S_{****13}|$$

ved hjelp av inklusjon-eksklusjon prinsippet.

b) Vis at a_n tilfredsstiller rekurrensrelasjonen

$$a_n = 10a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Hint: Beskriv a_n som

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(3)} + a_n^{(0,2,4-9)}$$

der $a_n^{(1)}$ er antallet bilskiltene med lengde n som slutter med 1, $a_n^{(3)}$ er antallet de som slutter med 3, og $a_n^{(0,2,4-9)}$ er antallet de resterende skiltene. Finn deretter relasjoner mellom

$$a_n^{(1)}, a_n^{(3)}, a_n^{(0,2,4-9)},$$
$$a_{n-1}^{(1)}, a_{n-1}^{(3)}, a_{n-1}^{(0,2,4-9)},$$
og
$$a_{n-2}^{(1)}, a_{n-2}^{(3)}, a_{n-2}^{(0,2,4-9)}$$

og bruk dette til å lage den ønskelige rekurrensrelasjonen.

c) Finn startbetingelsene (*the initial conditions*) og løs deretter rekurrensrelasjonen med disse startbetingelsene.

Merknad. Hvis du ikke er vant til å arbeide med kompliserte irrasjonale utrykk med kvadratrøtter, bruk tilnærmede verdier i stedet (du må beregne med minst **tre** desimaler etter kommaen).

b) Vis at a_n tilfredsstiller rekurrensrelasjonen

$$a_n = 10a_{n-1} - a_{n-2}.$$

Hint: beskriv a_n som

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(3)} + a_n^{(0,2,4-9)}$$

der $a_n^{(1)}$ er talet bilskiltene med lengde n som slutter med 1, $a_n^{(3)}$ er talet av skilt som slutter med 3, og $a_n^{(0,2,4-9)}$ er talet av dei resterande skilta. Finn deretter relasjonar mellom

$$a_n^{(1)}, a_n^{(3)}, a_n^{(0,2,4-9)},$$
$$a_{n-1}^{(1)}, a_{n-1}^{(3)}, a_{n-1}^{(0,2,4-9)},$$
og
$$a_{n-2}^{(1)}, a_{n-2}^{(3)}, a_{n-2}^{(0,2,4-9)}$$

og bruk dette til å lage den ønskelige rekurrensrelasjonen.

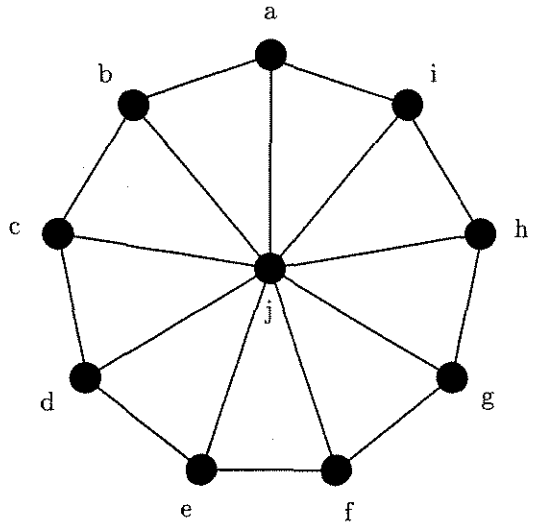
c) Finn startvilkåra (*the initial conditions*) og løys deretter rekurrensrelasjonen med disse startvilkåra.

Merknad. Hvis du ikkje er vant til å arbeide med kompliserte irrasjonale utrykk med kvadratrøter, bruk tilnærmede verdiar i staden (du må rekne med minst **tre** desimalar etter komma).

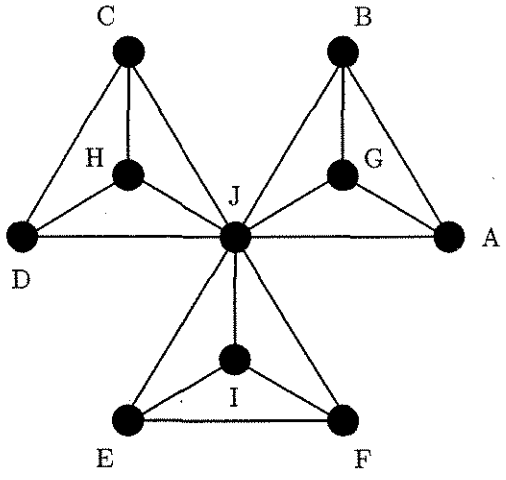
4 OPPGAVE

Gitt to grafer G og H:

G=



H=



a) Undersøk om det finnes en Euler vei (*an Euler path*) i grafen G.

b) Undersøk om det finnes en Hamilton vei (*a Hamilton path*) i grafen H.

Hint: Det finnes tre grupper av noder: $\{A, B, G\}$, $\{C, D, H\}$, $\{E, F, I\}$. Undersøk **hvordan** og **hvor mange ganger** en Hamilton vei kan gå fra en av disse gruppene til en annen.

c) Finn fargetallet (*the chromatic number*) $\chi(G)$ til grafen G.

d) Undersøk om grafene G og H er isomorfe.

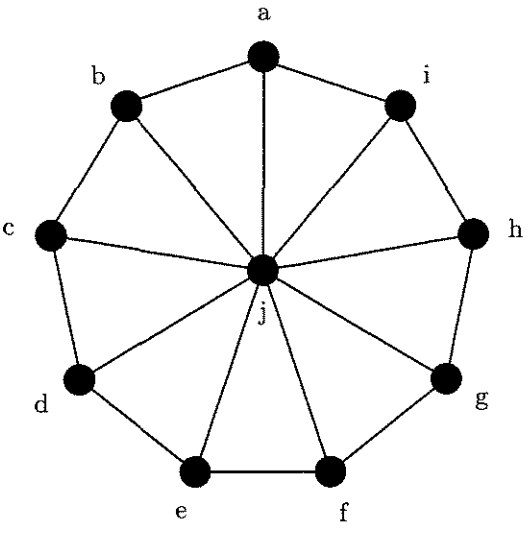
Hint: Undersøk om grafen G har en Hamilton vei, og bruk deloppgave **b**).

LYKKE TIL!

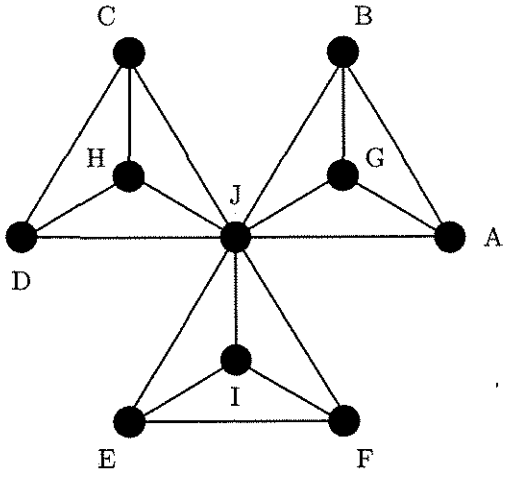
4 OPPGÅVE

Gitt to grafar G og H:

G=



H=



a) Undersøk om det fins ein Euler veg (*an Euler path*) i grafen G.

b) Undersøk om det fins ein Hamilton veg (*a Hamilton path*) i grafen H.

Hint: Det fins tre grupper av noder: $\{A, B, G\}$, $\{C, D, H\}$, $\{E, F, I\}$. Undersøk **korleis** og **kor mange gånger** ein Hamilton veg kan gå frå ein av disse gruppene til ein annen.

c) Finn fargetallet (*the chromatic number*) $\chi(G)$ til grafen G.

d) Undersøk om grafane G og H er isomorfe.

Hint: Undersøk om grafen G har ein Hamilton veg, og bruk deloppgave **b**).

LYKKJE TIL!