Eksamensoppgave i MAT-2101

Eksamen i	:	**Mat-2101 Hilbertrom**
Eksamensdato	:	**07.12.2007**
Tid	:	**09.00-13.00**
Sted	:	**Åsgårdveien 9**
Tillatte hjelpemidler	:	**Lommekalkulator, Rottmans tabeller og 2 A4-ark (4 sider) med trykte eller håndskrevne notater.**

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, 95423735

Oppgave 1

a) Finn Fourier sinus-utviklingen til $f(x) = x(\pi - x)$ på $[0, \pi]$.

b) Skissér grafen til utvidelsen $g(x)$ av $f(x)$ til intervallet $[-\pi, \pi]$ som en odde funksjon. Begrunn kort at Fourierrekken fra a) konvergerer punktvis til $g(x)$ på $[-\pi, \pi]$.

Oppgave 2

a) Definer begrepene

(i) konvergens av en følge,

(ii) fikspunkt til en avbildning,

(iii) kontraksjonskonstant til en avbildning

på et metrisk rom (X, d).

b) Gjengi Kontraksjonsprinsippet (Banachs Fikspunktsats,) og vis unikhetsdelen av resultatet.

c) Skriv om startverdiproblemet

$$y'(x) = 1 + xy(x)^3 \quad , \quad y(0) = 0$$

til en integrallikning, og gjennomfør ett steg av en fikspunktiterasjon (Picards metode) fra startpunktet $y_0(x) \equiv x$.

Oppgave 3

La $\mathcal{H}$ være et uendeligdimensjonalt Hilbertrom og $U = \{ x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1 \}$ den (lukkede) enhetsballen i $\mathcal{H}$. Vis at

a) U er en konveks mengde,

b) U er en lukket mengde,

c) U er ikke en kompakt mengde.

Oppgave 4

Definer

$$X = \{ f \in C_c^\infty(-\infty, \infty) \mid f^k(0) = 0 \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots \}$$

hvor $C_c^\infty(I)$ betegner det lineære rommet av uendelig deriverbare funksjoner på I som er null utenfor et lukket og begrenset intervall.

a) La

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{og} \quad D = \frac{d}{dx}$$

betegne Volterra-operatoren og derivasjons-operatoren respektive, betraktet som operatorer på X. Regn ut at $DVf = f$ og $VDf = f$ for vilkårlige $f \in X$. Finn kjernene (nullrommene) $\ker(D)$ og $\ker(V)$ til de to operatorene.

b) Legg et indreprodukt

$$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} v(x)\,dx$$

på X og påvis at operatoren $A = iD$ er symmetrisk. Utled at $B = -iV$ også er symmetrisk.

Eksamensoppgave i MAT-2101

Eksamen i	:	**Mat-2101 Hilbertrom**
Eksamensdato	:	**07.12.2007**
Tid	:	**09.00-13.00**
Sted	:	**Åsgårdveien 9**
Tillatte hjelpemidler	:	**Lommekalkulator, Rottmans tabeller og 2 A4-ark (4 sider) med trykte eller håndskrevne notater.**

Nynorsk

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: Marius Overholt, 95423735

Oppgåve 1

a) Finn Fourier sinus-utviklinga åt $f(x) = x(\pi - x)$ på $[0, \pi]$.

b) Tekn grafen åt utvidginga $g(x)$ åt $f(x)$ til intervalet $[-\pi, \pi]$ som ein odde funksjon. Grunngje stutt at Fourierrekka frå a) konvergerar punktvis mot $g(x)$ på $[-\pi, \pi]$.

Oppgåve 2

a) Definer omgrepa

(i) konvergens av ei fylgje,

(ii) fikspunkt åt ei avbilding,

(iii) kontraksjonskonstant åt ei avbilding

på eit metrisk rom (X, d).

b) Gje att Kontraksjonsprinsippet (Banachs Fikspunktsats,) og syn at fikspunktet er unikt.

c) Skriv om startverdiproblemet

$$y'(x) = 1 + xy(x)^3 \quad , \quad y(0) = 0$$

til ei integrallikning, og gjennomfør eit steg av ein fikspunktiterasjon (Picards metode) frå startpunktet $y_0(x) \equiv x$.

Oppgåve 3

Let $\mathcal{H}$ vere eit uendelegdimenensjonalt Hilbertrom og $U = \{ x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1 \}$ den (lukka) einingsballen i $\mathcal{H}$. Syn at

a) U er ei konveks mengd,

b) U er ei lukka mengd,

c) U er ikkje ei kompakt mengd.

Oppgåve 4

Definer

$$X = \{ f \in C_c^\infty(-\infty, \infty) \mid f^k(0) = 0 \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots \}$$

kor $C_c^\infty(I)$ er det lineære rommet av uendeleg deriverlege funksjonar på I som er null utanfor eit lukka og avgrensa intervall.

a) Let

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{og} \quad D = \frac{d}{dx}$$

tyde Volterra-operatoren og derivasjons-operatoren respektive, rekna som operatorar på X. Rekn ut at $DVf = f$ og $VDf = f$ for godtykkelege $f \in X$. Finn kjernane (nullromma) $\ker(D)$ og $\ker(V)$ åt desse operatorane.

b) Legg eit indreprodukt

$$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)}v(x)\,dx$$

på X og påvis at $A = iD$ er ein symmetrisk operator. Syn deretter at $B = -iV$ óg er symmetrisk.

Final exam in MAT-2101

Exam in	:	**MAT-2101 Hilbert space**
Date	:	**Friday December 7th, 2007**
Time	:	**09:00 – 13:00**
Place	:	**Åsgårdveien 9**
Approved remedies	:	**Calculator, Rottmann's tables, 2 A4 sheets (4 pages) of printed or written notes.**

The exam contains 3 pages including this cover page

Contact person: Marius Overholt, 95423735

Problem 1

a) Find the Fourier sine expansion of $f(x) = x(\pi - x)$ on $[0, \pi]$.

b) Sketch the graph of the extension $g(x)$ of $f(x)$ to the interval $[-\pi, \pi]$ as an odd function. Argue briefly that the Fourier series from part a) converges pointwise to $g(x)$ on $[-\pi, \pi]$.

Problem 2

a) Define the concepts of

(i) convergence of a sequence,

(ii) fixpoint of a mapping,

(iii) contraction constant for a mapping

on a metric space (X, d).

b) State the Contraction Principle (Banach Fixpoint Theorem,) and prove the uniqueness part of the result.

c) Rewrite the initial value problem

$$y'(x) = 1 + xy(x)^3 \quad , \quad y(0) = 0$$

as an integral equation, and carry out a single step of a fixpoint iteration (Picard's method) from the starting point $y_0(x) \equiv x$.

Problem 3

Let $\mathcal{H}$ be an infinite-dimensional Hilbert space and $U = \{ x \in \mathcal{H} \mid \|x\| \leq 1 \}$ the (closed) unit ball in $\mathcal{H}$. Show that

a) U is a convex set,

b) U is a closed set,

c) U is not a compact set.

Problem 4

Define

$$X = \{ f \in C_c^\infty(-\infty, \infty) \mid f^k(0) = 0 \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots \}$$

where $C_c^\infty(I)$ denotes the linear space of infinitely differentiable functions on I that are zero outside some closed and bounded interval.

a) Let

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt \quad \text{and} \quad D = \frac{d}{dx}$$

denote the Volterra operator and the differentiation operator respectively, considered as operators on X. Compute that $DVf = f$ and $VDf = f$ for arbitrary $f \in X$. Find the kernels (nullspaces) $\ker(D)$ and $\ker(V)$ of the two operators.

b) Put an inner product

$$\langle u|v\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} v(x)\, dx$$

on X and verify that $A = iD$ is a symmetric operator. Then show that $B = -iV$ is also symmetric.