



EKSAMENSOPPGAVE I STA - 2001

Eksamen i : Sta - 2001 Stokastiske prosesser
Dato : Torsdag 6. desember 2007
Tid : Kl. 09.00 – 13.00
Sted : Åsgårdveien 9
Tillatte hjelpemidler : 4 (A4) sider egne notater.
"Tabeller og formel i statistikk", av Kvaløy og Tjelmeland.
Godkjent lommekalkulator.

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside.

Kontaktperson: Sigrunn H. Sørbye, tlf. 92 43 97 22. (Kommer innom ca kl. 11.)

Oppgave 1

En fabrikk tegner hvert år en avtale for ett visst produkt med en av tre underleverandører. Sekvensen av valgte underleverandører følger en Markovkjede på tilstandsrommet $\{1, 2, 3\}$ med overgangsmatrise

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 \\ 5/12 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

- a) Tegn et tilstandsdiagram for den gitte Markovkjeden. Finn følgende sannsynligheter

$$P(X_2 = 2 \mid X_0 = 1), \quad P(X_2 \neq 3, X_1 \neq 3 \mid X_0 = 2).$$

La T angi antall år til leverandør 3 blir valgt, dvs.

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n = 3\}.$$

Vi definerer

$$u_i = E(T \mid X_0 = i), \quad i = 1, 2, 3.$$

- b) Sett opp et likningssystem og finn de betingede forventningene u_1 , u_2 og u_3 .
 c) Begrunn hvorfor grensefordelingen for den gitte kjeden eksisterer. Sett opp aktuelle likninger og finn grensefordelingen.
 d) I det lange løp, hva blir sannsynligheten for at samme underleverandør velges to år på rad?

Oppgave 2

La $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ angi en vanlig forgreningsprosess der X_n angir antall individer i generasjon n . Vi antar at alle individer gir opphav til nye avkom uavhengig av hverandre og med samme sannsynlighetsfordeling. La Z betegne antall avkom til et vilkårlig individ. Sannsynlighetsfordelingen til Z er gitt ved

$$P(Z = j) = (1 - p)^j p, \quad j = 0, 1, \dots$$

og forventningen til Z er gitt ved

$$E(Z) = \frac{1 - p}{p}.$$

La π_0 angi sannsynligheten for at populasjonen til slutt dør ut. Vi antar at $X_0 = 1$.

- a) Vis ved å betinge på X_1 at π_0 vil tilfredsstille likningen

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j P_j,$$

der $P_j = P(Z = j)$ og der $p < \frac{1}{2}$. Hva blir sannsynligheten for at den gitte populasjonen dør ut for ulike verdier av p ?

Oppgave 3

Anta at antall innkomne telefonsamtaler til en opplysningssentral følger en Poissonprosess med forventning $\lambda > 0$. Vi antar at opplysningssentralen har uendelig kapasitet, dvs. at alle innkomne samtaler mottas umiddelbart. La $N(t)$ angi totalt antall telefonsamtaler som er mottatt i intervallet $(0, t)$. La T_i angi ventetiden mellom $i - 1$ 'te og i 'te samtale som mottas av opplysningssentralen og la $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$.

- a) Beregn følgende størrelser:

$$E(S_3), \quad P(T_1 < \frac{t}{2} \mid N(t) \geq 1).$$

- b) Vis at den betingede fordelingen til T_1 gitt $N(t) = 1$ er gitt ved

$$P(T_1 < s \mid N(t) = 1) = \frac{s}{t}, \quad 0 < s < t.$$

Hvilken sannsynlighetsfordeling er dette? Hva blir sannsynlighetsfordelingen til $S_1, \dots, S_n$ dersom vi har gitt at $N(t) = n$? (Trenger ikke vises).

- c) Gitt $N(t) = 4$, hva blir sannsynligheten for at 3 eller flere av samtalene ble mottatt i intervallet $(t/2, t)$?

Vi antar nå at betjeningstiden U for hver samtale er eksponensialfordelt med rate μ , dvs.

$$P(U < u) = 1 - e^{-\mu u}, \quad \mu > 0.$$

Betjeningstidene for hver kunde antas stokastisk uavhengige og betjeningstidene er også uavhengig av tidspunkter for innkomne telefonsamtaler. La $Y(t)$ angi antall telefonsamtaler som pågår ved opplysningssentralen ved tid t .

- d) Finn sannsynligheten for at en telefonsamtale som ble påbegynt ved tid s ikke er ferdigbetjent ved tid t , der $0 < s < t$. Hva blir $E(Y(t))$?
- e) Er $Y(t)$ tidsreversibel? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Angi nødvendige betingelser for at grensefordelingen, gitt ved

$$P_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y(t+s) = j \mid Y(s) = i), \quad \text{der } j = 0, 1, \dots$$

eksisterer og finn denne grensefordelingen.