EKSAMENSOPPGAVE I STA-2002

Eksamen i	:	**Sta-2002 Videregående statistikk**
Eksamensdato	:	**Tirsdag 11. Desember 2007**
Tid	:	**Kl. 0900–1300**
Sted	:	**Åsgårdvegen 9**
Tillatte hjelpemidler	:	**4 sider (A4) egne notater** **Godkjent kalkulator** **Rottmanns formelsamling** **Tabeller og formler i statistikk (Kvaløy og Tjelmeland, NTNU)**

Oppgavesettet er på 4 sider inklusive forside

Kontaktperson under eksamen: Fred Godtlibsen, tlf. 77 64 40 19

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefax: 77 64 47 65

Oppgave 1

La X være en stokastisk variabel med tetthetsfunksjon

$$f(x) = \tfrac{1}{b}(x/b)\cdot e^{-x/b}, \quad x \geq 0,\ b > 0$$

a) Vis at momentgenerende funksjon $M_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$ er gitt som følger:

$M_X(t) = (1-bt)^{-2}$

Beregn EX og $\operatorname{var} X$.

Vi skal i resten av oppgaven se på estimering av b med basis i n uavhengige variable $X_1,\ldots,X_n$ med samme tetthetsfunksjon $f(x)$.

b) Vis at 1. ordens momentestimator for b er $b_{\text{mom}} = \tfrac{1}{2}\overline{X} = \tfrac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Er b_{mom} forventningsrett? Suffisient? Komplett? Begrunn svarene.

c) Finn sannsynlighetsmaksimeringsestimatoren (SME) b_{sme} for b.
Bestem deretter asymptotisk sannsynlighetsfordeling til b_{sme} når $n \to \infty$.
Er b_{mom} en UMVUE ("Uniform Minimum Variance Unbiased Estimator") for b i dette tilfellet? Begrunn svaret.

Oppgave 2

I et eksperiment skal en undersøke overlevelse av larver i et vannkar. Ved tidspunktet $t = 0$ slippes n levende larver i karet og det observeres hvor mange larver X som har overlevd ved tidspunkt $t = t_{\text{obs}}$. Det antas at overlevelsen til enhver larve er uavhengig av overlevelsen til de andre. Anta at $X|p$ er binomisk fordelt Bino(n,p) med ukjent p. Forskerne som utfører eksperimentet har fra tidligere erfaring en apriori oppfatning om p som kan uttrykkes ved følgende aprioriforde ling:

$$\pi_0(p) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1};\ 0 < p < 1,\quad \alpha = 3,\quad \beta = 8.$$

a) Bestem aposteriorifordelingen $\pi(p|x)$ og utdyp hva som menes med en konjugat aprioriforde ling i denne sammenheng.

b) Finn Bayes-estimatoren p_B for p forutsatt kvadratisk tapsfunksjon, og uttrykk denne på formen

$$p_B = w_{data}\, p_{\text{sme}} + w_{apriori} \cdot p_0,$$

der p_0 er forventningen til aprioriforde lingen π_0 og $p_{\text{sme}} = X/n$ er SME for p.

c) Hypotesen $H_0 : p \leq 0.1$ forkastes dersom $\int_{p \in H_0} \pi(p \mid x)\, dp \leq 0.05$.

Forkastes H_0 dersom $x = 7$ og $n = 50$? (bruk vedlagte tabell på s. 4).

Oppgave 3

La X være binomisk fordelt Bino(n,p). Vi betrakter hypotesen $H_0 : p \geq p_0$ mot $H_1 : p < p_0$.
Fordi X er diskret kan vi ikke konstruere en test med et vilkårlig eksakt (signifikans)nivå α_0, og vi vil kalle en test for en α-nivå test når det eksakte nivået α er så nær α_0 som mulig, men ikke større enn α_0.

a) Det kan vises at X er en suffisient observator for p, og vi skal basere testen på X med forkastingsområde $R : X \leq x_c$. Begrunn hvorfor akseptansområdet $A(p_0)$ for en α-nivå test kan angis som følger:

$$A(p_0) = \left\{x : \; x > x_c = F^{-1}(\alpha; n, p_0)\right\}$$

der F og F^{-1} angir henholdsvis kumulativ og invers kumulativ binomisk fordeling Bino(n,p_0).

b) La $[0,p_U]$ betegne det ensidige $(1-\alpha)$ konfidensintervallet for p som fremkommer ved å invertere akseptansområdet fra a).
Vis at $p_U = 1-\alpha^{1/n}$ når observasjonen er $x = x_{\text{obs}} = 0$.

c) Vis at familien av binomiske tetthetsfunksjoner f har en monoton sannsynlighetskvote (MLR), dvs. at $\lambda(x) = f(x;n,p)/f(x;n,q)$ er en monotont voksende eller avtagende funksjon av x for enhver $p > 0$ og $q > p$.
Begrunn hvorfor testen i a) er en uniformt sterkest α-nivå test (UMP).
(Hint: Karlin-Rubins teorem).

I et område ønsker man å tallfeste faren for alvorlige snøskred, selv om det ikke har forekommet slike alvorlige skred i de n påfølgende år man har hatt registreringer. La X_i betegne antall alvorlige snøskred i år i, og anta at $X_1,\ldots,X_n$ er uavhengige og Poisson-fordelte Po(λ) med forventning λ.

d) Vis at et eksakt $1-\alpha$ intervall $[0,\lambda_U]$ for λ er gitt ved $\lambda_U = (-\ln \alpha)/n$.
Vis deretter at $\lim_{n\to\infty} p_U = \lambda_U$ der $p_U = 1-\alpha^{1/n}$ (se Oppgave 2b).

---------- **FINE** ----------

Vedlegg

Normalfordeling $N(0,1)$

Tetthetsfunksjon (pdf): $$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad -\infty < z < \infty$$

Kumulativ fordelingsfunksjon: $$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(u)\, du$$

Binomisk fordeling

Tetthetsfunksjon (pdf): $$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad 0 < p < 1, \quad x = 0,1,\ldots,n$$

Kumulativ fordelingsfunksjon: $$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i=1}^{x} p^i (1-p)^{n-i}$$

Beta-fordeling

Tetthetsfunksjon (pdf): $$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$EX = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \text{var}\, X = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

Kumulativ betafordeling $F = F(p;\, \alpha = 10,\, \beta = 51)$									
p	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
F	0.0007	0.0731	0.4123	0.7868	0.9548	0.9941	0.9995	1.0000	1.0000