Eksamen i:	MAT-1004, lineær algebra
Eksamensdato:	Tirsdag 14. juni 2005
Tidspunkt:	09.00 -13.00
Eksamensstad:	Aud. Max, Uitø.
Tillatne hjelpemiddel:	To A4-ark med eigne notater, tilsamen 4 sider, Rottmanns tabellar, godkjent kalkulator.
Kontaktperson:	Cathrine V. Jensen. Tlf: 776 44014/ 454 42047
Målform:	Nynorsk

Svara skal innehalde tilstrekkeleg med mellomrekning og resonnement til at framgangsmåte kjem fram. Kvart delspørsmål tel likt.

Oppgåvesettet er på 3 sider.

Lykke til!

Oppgåve 1

(a) Det lineære likningssystemet

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

kan skrivast på matriseform, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, og A er koeffisientmatrise. Skriv opp den augmenterte matrisa til systemet, og finn alle $\mathbf{x}$ som løyser $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Angi ein basis til nullrommet til A, og dimensjonen. Kva er rangen til A?

(c) Gitt $\mathbf{x_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, finn $\mathbf{b} = A\mathbf{x_0}$. Finn alle andre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ som oppfyller likninga

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Oppgåve 2

(a) Kva verdier av $k \in \mathbb{R}$ gir at matrisa

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix}$$

er invertibel? Sett så $k = 2$, kva er då mengda av løysinger til likninga

$$B\mathbf{x} = \mathbf{0}\,, \quad \text{der } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(b) Forklar kvifor $\{p_1 = 1 - x,\ p_2 = 3x,\ p_3 = 2 + x\}$ er eit lineært *avhengig* sett i P_1, der P_1 er vektorrommet av polynom av grad ≤ 1. Finn ein basis for P_1 som består av element frå mengda $\{p_1, p_2, p_3\}$.

(c) La x være ein eigenvektor til ei 2×2-matrise A, med tilhøyrande eigenverdi λ. Vis at då er x ein eigenvektor til matrisa $A^2 - 5I$, der I er identitetsmatrisa (størrelse 2×2). Kva er tilhøyrande eigenverdi?

Oppgåve 3

(a) Gitt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Finn eigenverdiane og tilhøyrande eigenvektorar til A. Angi basis og dimensjon for kvart eigenrom.

(b) Finn ei matrise P som diagonaliserer A, dvs P slik at $P^{-1}AP = D$, diagonal. Skriv opp tilhøyrande D. Forklar kvifor A ikkje er *ortogonalt* diagonaliserbar.

La $S = \{e_1, e_2\}$ vere standard basis for $\mathbb{R}^2$, og la B vere basisen for $\mathbb{R}^2$ som består av kolonnevektorane i P. Då er P overgangsmatrise fra basis B til S.

(c) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være den lineære operatoren som har matrise $[T]_S = A$ relativt til standard basis S.

Angi matrisa til T relativt til basis B, $[T]_B$. Finn matrisa $[T^3]_B$, der $T^3 = T \circ T \circ T$.