Eksamen i	MAT-1004 lineær algebra
Eksamensdag	Tirsdag 15. juni 2004
Eksamenstid	0900 - 1300
Eksamenssted	Samvirkegården 4. etg.
Tillatte hjelpemidler	Rottmanns tabeller To A4-ark beskrevne på begge sider Godkjent kalkulator
Kontaktperson:	Professor Einar Mjølhus Tlf. 776 44013

Besvarelsen må inneholde vesentlige forklaringer av resonnementer og mellomregninger for å komme fram til svarene.

Oppgavesettet er på 3 sider. Hvert delspørsmål (a, b, c, etc.) vil telle likeverdig.

Oppgave 1.

Matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

er gitt.

a) Vis at M er inverterbar, og finn den inverse til M.

b) Påstand: Matrisen M er både symmetrisk og ortogonal. Forklar kort hva dette betyr, og at det stemmer. Gjør så rede for hva disse to egenskapene innebærer når det gjelder hvilke egenverdier og egenrom M kan ha.

c) Finn egenverdiene til M og finn basiser for de tilhørende egenrommene.

d) Ny påstand: Den lineære transformasjonen $T : R^3 \longrightarrow R^3$ gitt ved $T(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ representerer speiling om et plan i R^3. Ut fra resultatene fra c): Verifiser dette, og bestem dette planet. Planet skal beskrives på formen $ax + by + cz = d$ der x, y, z er koordinater og a, b, c, d er konstanter som skal bestemmes.

Oppgave 2.

a) La A være en $m \times n$-matrise og X en $n \times 1$-matrise hvor komponentene representerer de ukjente i ligningssystemet

(1) $\qquad AX = 0$.

Gjør rede for hva som menes med *løsningsrommet* til (1); herunder skal det vises at løsningene til (1) utgjør et vektorrom.

b) La matrisen A være definert som

(2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

Finn en basis for løsningsrommet til (1) når A er gitt ved (2). Angi også den generelle løsningen til (1).

c) Gjør rede for hva som menes med rangen til en matrise, og forklar hvordan rangen til A gitt ved (2) bestemmes ut fra svaret på spørsmål b).

d) Finn en betingelse på komponentene i 3×1-matrisen B slik at ligningssystemet

(3) $\qquad AX = B$

har løsning, når A er gitt ved (2). Betingelsen skal uttrykkes på formen $n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = c$, der $b_{1,2,3}$ er komponentene i B og $n_{1,2,3}$ og c er tall som skal bestemmes.

e) Vis at mengden av B som er slik at (3) har løsning når A er gitt ved (2), utgjør et vektorrom, og angi dimensjonen til dette vektorrommet.

Oppgave 3.

La M_{22} betegne vektorrommet av 2×2-matriser.

a) Hva er dimensjonen til M_{22}? Begrunn svaret ved å angi en basis for M_{22}.

b) La $L: M_{22} \longrightarrow M_{22}$ være den lineære operatoren gitt ved

$$L(C) = C^T$$

Finn matrisen til L med hensyn til basisen angitt i spørsmål a).

c) Bestem egenverdiene til L og bestem de tilhørende egenrommene til L. Dette spørsmålet kan besvares ut fra resultatet fra b), men det kan også besvares på annen måte.

d) Finn determinanten til L.

Lykke til.