EKSAMENSOPPGAVE MAT-1004

Eksamen i	:	**Mat-1004 Lineær algebra**
Eksamensdato	:	**Fredag 15. oktober 2004**
Tid	:	**Kl 09:00-13:00**
Sted	:	**Samvirkegården, 4. etasje**
Tillatte hjelpemidler	:	**- 2 A4 ark skrevet på begge sider**
		- Rottmanns tabeller

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: **Professor Einar Mjølhus,**
Tlf 44013

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Besvarelsen må inneholde vesentlige forklaringer av resonnementer og mellomregninger for å komme fram til svarene. Hvert delspørsmål (a, b, c, etc.) vil telle likeverdig.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1.

a) Finn alle løsninger til ligningen

(1) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \ .$$

b) Angi dimensjonen for løsningsrommet til (1), og angi en basis for dette.
c) Finn alle løsninger til ligningen

(2) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

d) La A være en $m \times n$-matrise, $x \in \mathbf{R}^n$ og $b \in \mathbf{R}^m$. Vis at de b som er slik at ligningssystemet

(3) $$Ax = b$$

har løsning, danner et vektorrom.

Oppgave 2.

La P_3 betegne vektorrommet av polynomer av grad ≤ 3. La $D : P_3 \to P_3$ være derivasjonsoperatoren:

(4) $$(Dp)(x) = p'(x)$$

Standard basis for P_3 er $\{1, x, x^2, x^3\}$

a) Påvis at D blir en lineær operator.
b) Beskriv kjernen og bildet til D.
c) Finn matrisen til D med hensyn på standardbasisen.

Oppgave 3.

La M være en $n \times n$-matrise gitt ved

(5) $$M = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

altså 1-tall på "den omvendte diagonalen" og 0 ellers.

a) Finn determinanten til M for n=2, 3 og 4.
b) Finn determinanten i det generelle tilfellet.
c) Vis at M er inverterbar for enhver n, og finn M^{-1}.
d) Vis at M er ortogonalt diagonaliserbar og at mulige egenverdier er 1 og -1.