Universitetet i Tromsø

Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

EKSAMENSOPPGAVE MAT-2100

Eksamen i:	MAT-2100, Kompleks Analyse
Eksamensdag:	Fredag 11/06 2004
Eksamenstid:	Kl. 09.00-13.00
Eksamenssted:	Samvirkegården, 3. etg.
Tillate hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, Rottmanns formelsamling og 5 sider av egne notater
Oppgavesettet:	Totalt på 4 sider (inkl. forside)
Kontaktperson:	Professor *Boris Kruglikov*, tlf. 776 44 779 eller 938 02 163
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I: Analytiske funksjoner

1. La $D \subset \mathbb{C}$ være et område (=domain) og $f(z) \neq$ const en funksjon. Er det da sant at $f(D)$ også er et område hvis avbildningen $f : D \to \mathbb{C}$ er

   (i) kontinuerlig, (ii) analytisk ($\mathbb{C}$-deriverbar).

   Gi enten argumentasjon eller mot-eksempel.

2. Finn mengden av alle punkter hvor de følgende funksjonene er: a) kontinuerlige; b) analytiske. Er disse mengdene områder?

   (i) $f(z) = |z|^2/\bar{z}$, $z = x + iy$,

   (ii) $f(x, y) = (x \cos x \cosh y + y \sin x \sinh y) + \\ + i(y \cos x \cosh y - x \sin x \sinh y)$.

3. La $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ være en analytisk funksjon og $f(z) \neq 0$. Vis at den følgende funksjonen er harmonisk:
$$\phi(x, y) = \frac{uv}{(u^2 + v^2)^2}.$$

4. La $F(z) = \sqrt[3]{z - 2}$ være en multippelverdifunksjon med snitt (=cut) $\gamma = (-\infty, 2] \subset \mathbb{C}$. Velg en grein av den ved $F(3) = e^{4\pi i/3}$. Finn da verdien $F(2i)$.

Oppgave II: Rekketeori

1. Finn konvergensradien til følgende potensrekker:

$$\text{(i)} \sum_{n=0}^{\infty} n^{-n} n!\, z^n, \qquad \text{(ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n + 1}{3^n} z^n.$$

2. Finn alle maksimale annuli med sentrum i 0, hvor funksjonen

$$f(z) = \frac{z + 2/3}{(z + 1 - i)(z + 2i)}$$

er analytisk. I den annulus som ikke er tilgrensende til 0 og ∞ skriv ned Laurentrekken til $f(z)$.

Oppgave III: Residyteori

1. Finn og klassifiser alle singulariteter i $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ til funksjonen

$$F(z) = \frac{e^z \sin z}{(z-1)z(z+i)^2}.$$

2. Beregn residyet i hver av singularitene til denne funksjonen $F(z)$. Beregn deretter integralet

$$\oint_{|z-i|=3/2} F(z)\, dz.$$

3. Beregn det uekte integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-2)\cos x}{x^2+x+1}\, dx.$$

   Husk at svaret skal være reelt.

4. Formuler Rouche's teorem. Ved bruk av det, finn antall nullpunkt til funksjonen

$$F(z) = e^z - 10z + 1$$

   i området $D = \{|z| < 2\}$.