Universitetet i Tromsø

Institutt for Matematikk og Statistikk

Eksamen i:	MAT-2101 Hilbertrom
Eksamensdag:	11. desember 2003
Tid for eksamen:	09.00 - 13.00
Sted for eksamen:	Samvirkegården 4. et.
Tillatte hjelpemiddel:	Rottmanns tabeller, to A4-ark med egne notater, og godkjent kalkulator.

Settet består av 4 oppgaver på tre sider.

Oppgave 1

La (X, d) være et metrisk rom og $f : X \to X$ en kontraksjon.

a) Påvis at hvis f har et fikspunkt, så er det unikt.

b) Gi et eksempel på et metrisk rom med en kontraksjon som ikke har noe fikspunkt.

Oppgave 2

Det er oppgitt at Fourier's system

$$\left\{ \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

er en fullstendig ortonormal følge i $L^2(-\pi, \pi)$.

a) Partialsummene til Fourierekspansjonen til e^x på $[-\pi, \pi]$ er

$$s_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

hvor

$$c_n = \langle e^x, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^x \frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

er Fourierkoeffisientene til e^x på $[-\pi, \pi]$.

Kan $s_N(x) \to e^x$ når $N \to \infty$ både i punktet $x = -\pi$ og i punktet $x = \pi$?

Konvergerer $s_N(x)$ punktvis til e^x overalt på $[-\pi, \pi]$?

Angi en form for konvergens som er velegnet for Fourierekspansjoner til L^2-funksjoner, og formuler en konvergenssats for slike Fourierekspansjoner.

b) Regn ut den beste tilnærmingen $\tilde{f}$ til e^x i L^2-forstand på $[-\pi, \pi]$ fra underrommet

$$M = \text{lin}\{\frac{e^{-2ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{-ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ix}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{2ix}}{\sqrt{2\pi}}\} \ .$$

Et gyldig svar (som du kan få bruk for senere) er

$$\tilde{f}(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left(1 - \frac{e^{-ix}}{1+i} - \frac{e^{ix}}{1-i} + \frac{e^{-2ix}}{1+2i} + \frac{e^{2ix}}{1-2i}\right) \ .$$

c) Påvis ved utregning at for hvert heltall n er

$$\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$$

en egenfunksjon til Sturm-Liouville operatoren

$$(Ly)(x) = -\frac{d^2y}{dx^2} + y(x)$$

med domene $D_L = \{ \ y \in C^2(-\pi, \pi) \ : \ y(-\pi) = y(\pi) \ , \ y'(-\pi) = y'(\pi) \ \}$.

Angi de tilhørende egenverdiene.

d) Finn en god tilnærming $\tilde{y}$ fra underrommet M til løsningen y til det inhomogene Sturm-Liouville randverdiproblemet

$$(Ly)(x) = e^x \ .$$

Oppgave 3

Hvis A og B er lineære operatorer slik at sammensetningene AB og BA eksisterer og har et felles definisjonsrom, så kalles operatoren $[A, B] = AB - BA$ for *kommutatoren* til A og B.

a) La $V = C_c^\infty(-\infty, \infty)$ være det lineære rommet av funksjoner ψ slik at $\psi^{(k)}(x)$ eksisterer for alle $k = 0, 1, 2, \ldots$ og alle $x \in (-\infty, \infty)$, og slik at for hver ψ eksisterer en $b > 0$ slik at $\psi(x) = 0$ for $|x| > b$.

Definer to lineære operatorer

$$\begin{aligned} \hat{x} &: V \to V \quad \text{gitt ved} \quad (\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x) \\ \hat{p} &: V \to V \quad \text{gitt ved} \quad (\hat{p}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d\psi}{dx} \ . \end{aligned}$$

Regn ut $[\hat{x}, \hat{p}]\psi$ for $\psi \in V$. Merk at her er $\hbar$ en konstant.

b) La $A, B : H \to H$ være begrensede lineære operatorer på et Hilbertrom H. Regn ut den adjungerte $[A, B]^*$ til $[A, B]$ uttrykt ved A^* og B^*.

Oppgave 4

La $C(0, 1)$ være rommet av kontinuerlige funksjoner på $[0, 1]$. Hvis $y \in C(0, 1)$ så eksisterer integralet

$$(Ty)(x) = \int_0^x u^{-1/3} y(u) du$$

og definerer en lineær operator $T : C(0, 1) \to C(0, 1)$.

a) Finn en konstant $C > 0$ slik at $\|Ty\|_2 \leq C\|y\|_2$ for alle $y \in C(0, 1)$. Her er

$$\|y\|_2 = \left(\int_0^1 |y(u)|^2 du\right)^{1/2} \ .$$

b) Avgjør om det finnes noen konstant $C > 0$ slik at $\|Ty\|_1 \leq C\|y\|_1$ for alle $y \in C(0, 1)$. Her er

$$\|y\|_1 = \int_0^1 |y(u)| du \ .$$