EKSAMENSOPPGAVE MAT-2101

Eksamen i	:	**MAT-2101 Hilbertrom**
Eksamensdato	:	**Tirsdag 14. desember 2004**
Tid	:	**Kl 09:00-13:00**
Sted	:	**Samvirkegården, 4. etasje**
Tillatte hjelpemidler	:	**- 2 A4 ark skrevet på begge sider**
		- Rottmanns tabeller

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside.

Kontaktperson under eksamen: Einar Hjølhus tlf. 44013

Oppgave 1

a) La (X,d) være et metrisk rom. Definer hva som menes med at en mengde $A \subset X$ er åpen i X.

b) Avgjør hvilke av følgende undermengder av $\mathbf{R}^2$ som er åpne i $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$B = \{(x,0) \mid -1 < x < 1\}$$

$$C = A \cup B$$

$$D = B^c \text{ (komplementmengden)}$$

Gi korte begrunnelser for svarene, om nødvendig med støtte i enkle figurer.

c) La $A_1, A_2, ..., A_n$ være åpne undermengder av X. Bevis at

$$A = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$$

blir åpen i X.

d) Vis ved et eksempel at snittet av en uendelig samling av åpne mengder ikke nødvendigvis er åpen.

Oppgave 2

a) La $g(x) = \sin^2 x$. Finn ei Fourier-rekke på formen

(1) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inx)$$

som konvergerer mot $g(x)$.

b) La $f(x) = |\sin x|$. Finn Fourier-rekka på formen (1) for denne funksjonen.

c) Gjør rede for begrepene punktvis konvergens, uniform konvergens og konvergens i norm på $L^2([-\pi,\pi])$, og avgjør hvilke av disse typene av konvergens som er oppfylt i tilfellet under b).

Oppgave 3

a) La B være et Banach-rom og $T : B \to B$ en lineær operator. Definer hva som menes med at T er begrenset, og forklar hva som menes med normen til T.

b) Anta at $\|T\| < 1$. Vis ved hjelp av Banachs fikspunktsats at I-T har invers.

c) Vis også at $(I-T)^{-1}$ er begrenset og at $\|(I-T)^{-1}\| \leq 1/(1-\|T\|)$

Oppgave 4

a) La H og K være Hilbert-rom og $A : H \to K$ en begrenset lineær avbildning. Definer hva som menes med den adjungerte lineære avbildningen A^*, og forklar ved hjelp av Riesz' representasjonsteorem (Riesz-Frechéts teorem) at A^* eksisterer.

b) La $\{e_j\}_{j=1}^{n}$ være et fullstendig ortonormalt sett for H. Vis at egenskapen $Be_j = e_{j+1}$ for alle j definerer en lineær operator $B : H \to H$. Vis videre at B blir begrenset, og finn $\|B\|$.

c) Bestem B^*.

d) Avgjør om B blir kompakt. Svaret skal begrunnes.