Universitetet i Tromsø

Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

EKSAMENSOPPGAVE MAT-2200

Eksamen i:	MAT-2200, Differensialligninger
Eksamensdag:	8. Juni 2005
Eksamenstid:	Kl. 15.00-19.00
Eksamenssted:	Samvirkegården, 4. etg.
Tillate hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, Rottmanns formelsamling og alle mulige egne notater
Oppgavesettet:	Totalt på 5 sider (inkl. forside)
Kontaktperson:	Professor *Boris Kruglikov*, tlf. 776 44 779 eller 938 02 163
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I: Første ordens differensialligningene

1. Løs differensialligningen (finn alle løsninger):

$$t\frac{dx}{dt} = x - \varepsilon x^2.$$

2. I den forrige oppgaven betrakt hvor løsninger eksiterer og er entydige. Forklar ved bruk av teoremen om eksistens og entydighet. Finn hva er forskjell mellom $\varepsilon = 0$ or $\varepsilon \neq 0$.

Oppgave II: Høyere ordens lineære differensialligninger

1. Betrakt differensialoperatoren

$$L = (D+1)^3(D+9)^2(D^2+9).$$

Løs den homogene ligningen $L[x] = 0$ og inhomogene ligningen $L[x] = 3^6$.

Finn også formen til en partiell løsning av den inhomogene ligningen $L[x] = t^2e^{-t} + \cos te^t + t\sin 3t$ (ikke beregn koeffisienter til den partikulære løsningen).

2. La ∇ være en lineær differensialoperator av order 2. Er løsningsrommet $\mathrm{Sol}(\nabla)$ til ligningen $\nabla[x] = 0$ lineær? Hvis ja beregn $\dim \mathrm{Sol}(\nabla)$ og svar om $x_1 = t^2e^t$ kan være løsning til den ligningen. Hvis nei forklar hvorfor. Betrakt to muligheter: ∇ har konstant koeffisienter og ikke konstant.

Er løsningsrommet $\mathrm{Sol}(\nabla; e^t)$ til ligningen $\nabla[x] = e^t$ lineær? Kan $x_1 = t^2e^t$ være løsning: $x_1 \in \mathrm{Sol}(\nabla; e^t)$ i tillfelle at ∇ har konstant koeffisienter?

3. Det er oppgitt tre løsninger

$$x_1 = (5+t^2)e^{5t},\ x_2 = t^2e^{5t},\ x_3 = t(t+1)e^{5t}$$

til en annen ordens ikke-homogen lineær differensialligning. Finn den og skriv generelle løsningen.

Oppgave III: Første ordens lineær systemer

1. Løs systemet av differensialligninger $X' = AX$, hvor $X = X(t)$ er en vektor-funksjon $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ og

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -9 \\ 25 & -16 \end{pmatrix}.$$

Finn en partikulær løsning som oppfyller startverdi $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og den andre med $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Finn fundamental matrise løsning til matrise-ligning

$$\Phi' = A\Phi, \qquad \Phi(0) = \mathrm{Id}.$$

Beregn eksponenten e^A og gi oppskrift for den generelle løsningen til inhomogene lineære system

$$X' = AX + F(t).$$

Oppgave IV: Sturm-Liouville problem

1. Betrakt grense-verdi problem

$$\mathcal{L}[\psi] = 0,\ \psi(0) = 0,\ \psi(\pi) = 0,$$

hvor

$$\mathcal{L} = -D^2 + 4D - 1.$$

Finn spekteret og beskriv generelle løsning $\psi(x)$ til problemet (formalt, uten konvergense undersøkelse).

2. Vis at løsningsrommet til grense-verdi problem ($\mathcal{L} = -D^2+4D-1$ som ovennevnt og D er x-differensiering)

$$u_t = \mathcal{L}[u],\ u(t,0) = 0,\ u(t,\pi) = 0,\ u(3,x) = \rho(x)$$

er ikke lineært (anta $\rho \not\equiv 0$). Del problemet og løs den lineær del (formalt).

3. Beregn formal løsning til det overnevnte grense-verdi problemet for $u = u(t,x)$, hvis

$$\rho(x) = e^{2x}(\sin 3x - \sin x).$$