

Universitetet i Tromsø



Det Matematisk Naturvitenskapelige Fakultet
Institut for Matematikk og Statistikk

EKSAMENSOPPGAVE MAT-2200

Eksamen i:	MAT-2200, Differensialligninger
Eksamensdag:	Onsdag 9/06 2004
Eksamenstid:	Kl. 09.00-13.00
Eksamenssted:	Samvirkegården, 3. etg.
Tillate hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, Rottmanns formelsamling og 5 sider av egne notater
Oppgavesettet:	Totalt på 4 sider (inkl. forside)
Kontaktperson:	Professor <i>Boris Kruglikov</i> , tlf. 776 44 779 eller 938 02 163
Bemerkning:	Besvarelsen må inneholde alle mellomregninger man trenger for å komme fram til svaret

Oppgave I: Første ordens differensialligningene

1. Løs differensialligningen:

$$(x^2 + y^2)y'(x) = xy.$$

2. Løs startverdiproblemet:

$$y'(x) - 4xy = xy^2, \quad y(0) = -1.$$

3. Betrakt differensialligningen:

$$(1 - x^2)y'(x) + \sqrt[3]{x}\phi(y) = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

La $\phi(y) = y$. Finn det største åpne intervallet hvor vi kan garantere at løsningen eksisterer.

Kan vi garantere entydighet av løsningen?

Hva forandres for $\phi(y) = \sin y$?

Oppgave II: Høyere ordens lineære differensialligninger

1. Finn den generelle løsningen til ligningen

$$y'''(x) - y''(x) + y'(x) - y(x) = e^x.$$

2. Betrakt differensialoperatoren

$$L = (D - 1)(D + 2)^2(D^2 + 1)^2.$$

Løs den homogene ligningen $L[y] = 0$. Finn også formen til den generelle løsningen av den inhomogene ligningen $L[y] = xe^x + (x^2 - 1)e^{2x} - \cos 2x$ (men ikke beregn koeffisienter til den partikulære løsningen).

3. Betrakt mengden av funksjoner:

$$y_1 = x \cos 2x, \quad y_2 = x \sin 2x, \quad y_3 = x, \quad y_4 = 1.$$

Kan de utgjøre et fundamental-system for løsningene (basis for løsningsrommet) til en lineær differensialligningen med konstante koeffisienter? Hvis ja finn den.

Hvis nei, finn de største åpne intervaller hvor y_1, y_2, y_3, y_4 er et fundamental-system for løsningene til en lineær differensilligningen med ikke-konstante koeffisienter.

4. Det er oppgitt tre løsninger

$$y_1 = x \cos x, \quad y_2 = x \cos x - \sin x, \quad y_3 = (x + 2) \cos x$$

til en annen ordens ikke-homogen lineær differensialligning. Finn den og skriv dens generelle løsning.

Oppgave III: Første ordens lineær systemer

1. Løs systemet av differensialligninger $X' = AX$, hvor $X = X(t)$ er en vektor-funksjon $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og

$$A = \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Finn en partikulær løsning som oppfyller startverdien $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og den andre med $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Finn fundamental matrise løsning til matrise-ligning

$$\Phi' = A\Phi, \quad \Phi(0) = \text{Id}.$$

Beregn eksponenten e^A .

3. Beskriv den generelle metoden til å løse det inhomogene lineære system

$$X' = AX + F(t).$$

Bruk den i tilfellet $F(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.