EKSAMENSOPPGAVE MAT-2201

Eksamen i	:	**MAT-2201 Numerisk beregning**
Eksamensdato	:	**Mandag 7. juni 2004**
Tid	:	**Kl 09:00-13:00**
Sted	:	**Samvirkegården, 3 etasje**
Tillatte hjelpemidler	:	**- Rottmanns tabeller**
		- Kalkulator

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: Professor Tor Flå, tlf. 44024

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

a) Du får oppgitt ligningen

$$f(x) = x^2 - r = 0, \quad r > 0.$$

La $x_0 = r^{1/2} + d$ og utfør to steg med Newton's metode.
b) Estimer feilen etter to steg.
c) Vis at $| x_{n+1} - z | \leq C | x_n - z |^2$ der $C = \frac{1}{2r^{1/2}}$ for $r > 0$
d) Vis at hvis x_n har k korrekte sifre så vil x_{n+1} ha minst $2k - 1$ korrekte sifre for $r \geq O(1)$.

Oppgave 2

a) Du får oppgitt matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Finn en LU- faktorisering ved Doolittles algoritme.

b). Du får oppgitt at $U = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$ og $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bruk faktoriseringen til å løse ligningen $Ax = b = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$..

Her må du bestemme $t \in \mathbb{R}$ slik at ligningen får løsning.

Oppgave 3

Følgende setning er oppgitt

Setning: Anta $\| \mathbf{x} \|_2 = \| \mathbf{y} \|_2 = 1$. Hvis $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ og $< \mathbf{x}, \mathbf{y} > \in \mathbb{R}$ så vil en unitær matrise U slik at $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ være gitt ved $U = I - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ der $\mathbf{v} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) / \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|_2$ ..

a) Vis eksplisitt at U er en unitær matrise.

b) Du får nå oppgitt matrisen $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Finn $C = B^*B$ og løs egenverdiproblemet til C.

c) Finn SVD faktoriseringen av B og dens pseudoinvers B^+.

d) Finn den minimale løsningen til ligningen $Bx = c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Oppgave 4

Du får oppgitt følgene multistep numeriske metode for å løse ordinære differensialligninger

$$x_n - x_{n-2} = 2hf_{n-1}.$$

a) Hvilken orden har metoden. Bestem de tilhørende polynomene $p(z)$, $q(z)$ som karakteriserer metoden.

b) Fastslå om metoden er konsistent.Vis at $e_n = x(t_n) - x_n = 2h^2x''(t_{n-2}) + O(h^3)$.

c) La $f(x) = x$. Vis at dette numeriske skjemaet approksimerer ligningen $x(t)' = x(t)$ når $h \to 0$.