# EKSAMENSOPPGAVE MAT-3300

---

| | | |
|---|---|---|
| **Eksamen i** | **:** | **MAT-3300 Algebra 2.** |
| **Dato** | **:** | **Tirsdag 16. desember 2003.** |
| **Tid** | **:** | **09.00 - 13.00.** |
| **Sted:** | **:** | **Samvirkegården, 4. et.** |
| **Tillatte hjelpemidler** | **:** | **To A4 ark med egne notater, kalkulator.** |

**Oppgavesettet er på 3 sider eks. forside.**

**Kontaktperson: Professor Andrei Prasolov, mobil 48 12 50 27.**

Alle svar skal begrunnes!

# 1 OPPGAVE

La $S$ være følgende mulitiplikative system i ringen $\mathbb{Z}$:

$$S := \{n \in \mathbb{Z} \mid \gcd(n, 6) = 1\}$$

der gcd er den største felles divisor. La $R$ være lokaliseringen:

$$R := S^{-1}\mathbb{Z}.$$

**a)** Begrunn at idealene i ringen $R$ har formen $\langle 0 \rangle$ eller $\langle 2^i 3^j \rangle$ der $i, j \geq 0$;

**b)** Beskriv alle maksimale idealer i $R$;

**c)** Beskriv alle primidealer i $R$.

*(oppgave* **2** *på neste side)*

# 2 OPPGAVE

**a)** Beskriv polynomet

$$f(X) := X^4 + 4 \in \mathbb{Q}[X]$$

som produkt av irredusible polynomer over $\mathbb{Q}$.

I deloppgavene b)-d) nedenfor betrakter vi følgende matriser over kroppen $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

**b)** La $M$ være en modul over $\mathbb{Q}[X]$ som er isomorf med $\mathbb{Q}^4$ som $\mathbb{Q}$-modul, og som har følgende $\mathbb{Q}[X]$-modul struktur:

$$f \cdot v := f(A)(v), f \in \mathbb{Q}[X], v \in \mathbb{Q}^4.$$

Beskriv $M$ som direkte sum av primære sykliske moduler;

**c)** Finn den modifiserte Frobenius formen til matrisen $A$;

**d)** Undersøk om matrisene $A$ og $B$ er similære over $\mathbb{Q}$.

*(oppgave* **3** *på neste side)*

# 3 OPPGAVE

**a)** Bestem antallet moniske irredusible og antallet moniske primitive polynomer av graden 6 over $\mathbb{Z}_2$;

**b)** Vis at

$$f(X) := X^6 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$$

er et **irredusibelt** polynom; vis at det er **primitivt**;

I deloppgavene c)-e) nedenfor er $L$ den splittende kropputvidelse (*splitting field*) av $\mathbb{Z}_2$ til polynomet $f(X)$, $\beta$ er en rot til $f$ i kroppen $L$, $\alpha = \beta^{21}$, og $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$.

**c)** Vis at den minimale polynomet $g(X)$ til $\alpha$ over $\mathbb{Z}_2$ er lik $X^2 + X + 1$:

$$g := Min(\alpha, \mathbb{Z}_2) = X^2 + X + 1,$$

og bestem den minimale polynomet $h(X)$ til $\beta$ over $K$:

$$h := Min(\beta, K);$$

**d)** Bestem antallet moniske irredusible og antallet moniske primitive polynomer av graden 3 over $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$;

Vi minner om at **ordenen** til et irredusibelt polynom er lik ordenen til dets røtter i den multiplikative gruppen:

$$ord(p) := ord(\gamma, L^*), p(\gamma) = 0;$$

**e)** Finn **alle** moniske irredusible polynomer av graden 3 over $K = \mathbb{Z}_2(\alpha)$ som har orden 7; hvor mange slike polynomer finnes? Hva er produktet av alle slike polynomer?

# LYKKE TIL!