EKSAMENSOPPGAVE I STA-1002

Eksamen i	**:**	**STA-1002 Statistikk og sannsynlighet 2**
Eksamensdato	**:**	**Fredag 11. juni 2004**
Tid	**:**	**Kl 0900-1300**
Sted	**:**	**Samvirkegården, 3. etasje**
Tillatte hjelpemidler	**:**	**- 4 håndskrevne sider**
		- Kalkulator
		- Karl Rottmann: Matematiche Formelsamlung

Oppgavesettet er på 7 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Edvin Bredrup, tlf 44017

Oppgave 1

La $X_1, X_2, \ldots X_n$ være u.i.f. $N(\mu, \sigma^2)$, dvs. de har sannsynlighetstetthet

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\}$$

Forventning og varians er gitt ved

$$E(X_i) = \mu \qquad Var(X_i) = \sigma^2 \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

La videre $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ være u.i.f. $N(0, \sigma^2)$.

X_i ene og Y_i ene antas uavhengige. μ og σ^2 er ukjente, og på grunnlag av observasjonene ønsker vi si noe om de to parametrene.

a) Vis at MLE for μ er gitt ved

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}$$

og at MLE for σ^2 er gitt ved

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n+m}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 + \sum_{i=1}^{m} Y_i^2\right)$$

b) Begrunn eller vis at

$$\hat{\mu} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad \text{og at}$$

$$\frac{(n+m)}{\sigma^2}\hat{\sigma}^2 \sim \chi^2_{n+m-1}$$

det vil si kjikvadratfordelt med n+m-1 frihetsgrad.

Det oppgis at $\hat{\mu}$ og $\hat{\sigma}^2$ er uavhengige.

c) Konstruer 90% konfidensintervall for μ og σ^2.

d) Vis hvordan man går fram for å teste

$$H_0 : \mu = 0 \qquad \text{mot} \qquad H_1 : \mu \neq 0$$

Benytt nivå 5%.

Oppgave 2

Anta vi skal observere

$$(x_1, Y_1),\ (x_2, Y_2) \ldots (x_n, Y_n)$$

Vi forutsetter at dataene over tilfredstiller følgende modell

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \qquad i=1, 2, \ldots n$$

Der ε_i er uavhengige $N(0, \sigma^2)$, σ^2 er en ukjent parameter. β_0 og β_1 er også ukjente parametre. x_i er kjente tall.

Målet med analysen er å skaffe seg kunnskap om de ukjente, ikke observerbare parametrene β_0, β_1 og σ^2.

a) Argumenter for at Y_i, $i = 1, 2, \ldots n$ er uavhengige, $Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)$.

b) $Y_1, Y_2, \ldots Y_n$ er de eneste observerbare tilfeldige variable.

Sett opp likelihoodsfunksjonen og vis hvordan man går fram for å finne MLE for β_0, β_1, σ^2. Man trenger altså ikke å finne dem.

Betegn MLE for β_0, β_1, σ^2 med $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$ og $\hat{\sigma}^2$.

Det oppgis at

1) $\hat{\beta}_0$ og $\hat{\beta}_1$ er normalfordelte.

2) $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \qquad \text{Var}(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

der $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

3) $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{x}$ der $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$

4) $\overline{Y}$ og $\hat{\beta}_1$ er uavhengige.

5) $\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$

6) $\hat{\sigma}^2$ er uavhengig av $\hat{\beta}_1$.

Punktene 1-6 kan benyttes fritt i resten av oppgave 2.

c) Vis at

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \qquad Var(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2}{n} + \overline{x}^2 Var(\hat{\beta}_1)$$

d) Vis at $s^2 = \frac{n}{n-2}\hat{\sigma}^2$ er forventningsrett for σ^2 og argumenter for at den er uavhengig av $\hat{\beta}_1$.

e) Vis at $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\frac{s}{\sigma}\sqrt{Var\,\hat{\beta}_1}} \sim T_{n-2}$, dvs. studentfordelt med n-2 frihetsgraden.

Og benytt dette til å vise at

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s} \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \sim T_{n-2}$$

Finn et 95% konfidensintervall for β_1.

Oppgave 3

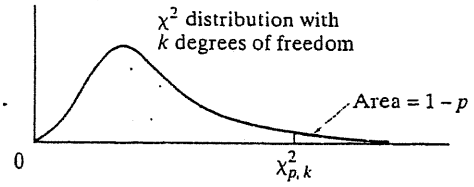
Et antall på *k* helseforbedringsmetoder av fysisk almentilstand skulle sammenlignes. *n* studenter ble delt inn i *k* grupper, der studentene i gruppe j fulgte helseforbedringametode *j*. Etter et år ble forbedring av fysisk helsetilstand til hver student registrert ved en score Y_{ij} for student nr *i* i gruppe nummer *j*. Tabellen under er en ufullstendig ANOVA tabell basert på resultatene fra eksperimentet.

Source	*df*	*ss*	*MS*	*F*
Treatment	3	322	?	3,82
Error	12	?	?	
Total	?	659		

a) Først antas at variansen til observasjonene er kjent lik 30.
Utfør en hypotesetest på om det er signifikant forskjell mellom gruppene.
Benytt nivå 2,5%.

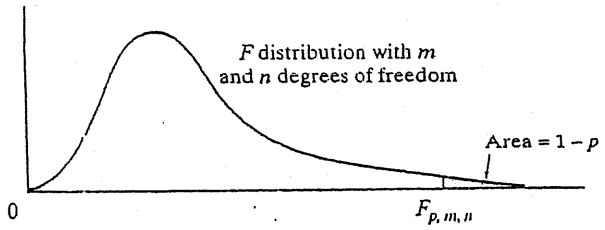
b) Fyll ut tabellen og utfør en hypotesetest med samme nullhypotese som i punkt a) hvis variansen antas ukjent. Benytt fortsatt nivå 2,5%.
Sammenlign med punkt a). Kommenter.

Upper and Lower Percentiles of χ^2 Distributions



p

df	0.010	0.025	0.050	0.10	0.90	0.95	0.975	0.99
1	0.000157	0.000982	0.00393	0.0158	2.706	3.841	5.024	6.635
2	0.0201	0.0506	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210
3	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345
4	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277
5	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.832	15.086
6	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812
7	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475
8	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090
9	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666
10	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209
11	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725
12	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.336	26.217
13	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688
14	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141
15	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578
16	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000
17	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409
18	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805
19	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191
20	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566
21	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932
22	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289
23	10.196	11.688	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638
24	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980
25	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314
26	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642
27	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.194	46.963
28	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278
29	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588
30	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892
31	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191
32	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486
33	17.073	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776
34	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061



Percentiles of F Distributions *(cont.)*

n	p \ m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	p
10	.0005	$.0^641$	$.0^350$	$.0^249$	.015	.028	.043	.057	.071	.085	.097	.108	.119	.0005
	.001	$.0^517$	$.0^310$	$.0^277$	.021	.037	.054	.071	.087	.101	.114	.126	.137	.001
	.005	$.0^441$	$.0^250$	.023	.048	.073	.098	.119	.139	.156	.171	.185	.197	.005
	.01	$.0^317$	.010	.037	.069	.100	.127	.151	.172	.190	.206	.220	.233	.01
	.025	$.0^210$	.025	.069	.113	.151	.183	.210	.233	.252	.269	.283	.296	.025
	.05	$.0^241$	.052	.114	.168	.211	.246	.275	.299	.319	.336	.351	.363	.05
	.10	.017	.106	.191	.255	.303	.340	.370	.394	.414	.430	.444	.457	.10
	.25	.107	.296	.409	.480	.529	.565	.592	.613	.631	.645	.657	.667	.25
	.50	.490	.743	.845	.899	.932	.954	.971	.983	.992	1.00	1.01	1.01	.50
	.75	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	.75
	.90	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28	.90
	.95	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	.95
	.975	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62	.975
	.99	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	.99
	.995	12.8	9.43	8.08	7.34	6.87	6.54	6.30	6.12	5.97	5.85	5.75	5.66	.995
	.999	21.0	14.9	12.6	11.3	10.5	9.92	9.52	9.20	8.96	8.75	8.58	8.44	.999
	.9995	25.5	17.9	15.0	13.4	12.4	11.8	11.3	10.9	10.6	10.3	10.1	9.93	.9995
11	.0005	$.0^641$	$.0^350$	$.0^249$	.015	.028	.043	.058	.072	.086	.099	.111	.121	.0005
	.001	$.0^516$	$.0^310$	$.0^278$	.021	.038	.055	.072	.088	.103	.116	.129	.140	.001
	.005	$.0^440$	$.0^250$	.023	.048	.074	.099	.121	.141	.158	.174	.188	.200	.005
	.01	$.0^316$	.010	.037	.069	.100	.128	.153	.175	.193	.210	.224	.237	.01
	.025	$.0^210$	.025	.069	.114	.152	.185	.212	.236	.256	.273	.288	.301	.025
	.05	$.0^241$	.052	.114	.168	.212	.248	.278	.302	.323	.340	.355	.368	.05
	.10	.017	.106	.192	.256	.305	.342	.373	.397	.417	.435	.448	.461	.10
	.25	.107	.295	.408	.481	.529	.565	.592	.614	.633	.645	.658	.667	.25
	.50	.486	.739	.840	.893	.926	.948	.964	.977	.986	.994	1.00	1.01	.50
	.75	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51	.75
	.90	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21	.90
	.95	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	.95
	.975	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43	.975
	.99	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	.99
	.995	12.2	8.91	7.60	6.88	6.42	6.10	5.86	5.68	5.54	5.42	5.32	5.24	.995
	.999	19.7	13.8	11.6	10.3	9.58	9.05	8.66	8.35	8.12	7.92	7.76	7.62	.999
	.9995	23.6	16.4	13.6	12.2	11.2	10.6	10.1	9.76	9.48	9.24	9.04	8.88	.9995
12	.0005	$.0^641$	$.0^350$	$.0^249$	.015	.028	.044	.058	.073	.087	.101	.113	.124	.0005
	.001	$.0^516$	$.0^310$	$.0^278$	.021	.038	.056	.073	.089	.104	.118	.131	.143	.001
	.005	$.0^439$	$.0^250$	.023	.048	.075	.100	.122	.143	.161	.177	.191	.204	.005
	.01	$.0^316$	.010	.037	.070	.101	.130	.155	.176	.196	.212	.227	.241	.01
	.025	$.0^210$	.025	.070	.114	.153	.186	.214	.238	.259	.276	.292	.305	.025
	.05	$.0^241$	.052	.114	.169	.214	.250	.280	.305	.325	.343	.358	.372	.05
	.10	.016	.106	.192	.257	.306	.344	.375	.400	.420	.438	.452	.466	.10
	.25	.106	.295	.408	.480	.530	.566	.594	.616	.633	.649	.662	.671	.25
	.50	.484	.735	.835	.888	.921	.943	.959	.972	.981	.989	.995	1.00	.50
	.75	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	.75
	.90	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15	.90
	.95	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	.95
	.975	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28	.975
	.99	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	.99
	.995	11.8	8.51	7.23	6.52	6.07	5.76	5.52	5.35	5.20	5.09	4.99	4.91	.995
	.999	18.6	13.0	10.8	9.63	8.89	8.38	8.00	7.71	7.48	7.29	7.14	7.01	.999
	.9995	22.2	15.3	12.7	11.2	10.4	9.74	9.28	8.94	8.66	8.43	8.24	8.08	.9995