EKSAMENSOPPGAVE I STA-2001

Eksamen i	:	Sta-2001, Stokastiske prosesser
Dato	:	Onsdag 1. desember 2004
Tid	:	Kl. 0900–1300
Sted	:	Samvirkegården 4. etg.
Tillatte hjelpemidler	:	Sheldon M. Ross: Introduction to Probability Models, 8. utg. K. Rottman: Matematisk formelsamling. Lommekalkulator.

Oppgavesettet er på 3 sider inklusive forside.

Kontaktperson: Sigrunn H. Sørbye, tlf. 77 64 55 04

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET
Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

La $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ angi en Markov-kjede med tilstandsrom $\{1,2,3,4,5\}$ og stasjonære overgangssannsynligheter gitt ved matrisen

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem ekvivalensklassene av kommuniserende tilstander og avgjør for hver klasse om den er rekurrent eller transient. Finn også tilstandenes periode.

b) Begrunn hvorfor grensefordelingene for de rekurrente klassene eksisterer, og bestem hva disse fordelingene blir.

c) Anta det er gitt at $X_0 = 4$. Finn sannsynligheten for at prosessen før eller siden absorberes i tilstand 5. Sett så opp verdien til

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}$$

for alle par i, j (f.eks i en matrise).

d) Anta igjen at $X_0 = 4$. La T være det første tidspunkt n når $X_n \neq 4$, dvs

$$T = \min\{n \geq 0 : X_n \neq 4\}$$

Finn simultanfordelingen til de stokastiske variablene T og X_T. Er T og X_T stokastisk uavhengige? Begrunn svaret.

Oppgave 2

I løpet av et helgedøgn (fra lørdag morgen til søndag morgen) antas pasienter å ankomme Tromsø legevakt med rate $\lambda(t)$ gitt ved

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5 & 0 < t \leq 10 \quad \text{(kl. 10–20 lørdag)} \\ 0.5t & 10 < t \leq 14 \quad \text{(kl. 20–24 lørdag)} \\ 7e^{(0.7-0.05t)} & 14 < t < 24 \quad \text{(kl. 00–10 søndag)} \end{cases}$$

der $t = 0$ angir kl. 10 lørdag morgen. La $N(t)$ angi antall pasienter som har ankommet legevakten t timer etter dette tidspunktet. Vi antar at $N(t)$ oppfyller kriteriene for en ikke-homogen Poisson-prosess.

a) Tegn en skisse av $\lambda(t)$. Hva blir forventet antall pasienter som ankommer legevakten i løpet av det gitte døgnet?

Mellom kl. 10 og 12 lørdag formiddag er legevakten bemannet av Lege I som bruker en tid $T_1 \sim \exp(\mu_1)$ pr. pasient. La $X(t)$ angi antall pasienter på legevakten (enten på venterom eller hos legen) ved tid t i denne perioden. Venterommet antas å ha uendelig kapasitet.

b) Anta at legen ved et gitt tidspunkt er opptatt med en pasient og at flere pasienter sitter på venterommet. Anta i dette punktet at pasientene ferdigbehandles med en rate $\mu_1 = 3$ pasienter pr. time.

Hva blir forventet tid til første pasient i køen på venterommet er ferdigbehandlet? Hva blir sannsynligheten for at første pasient i køen er ferdigbehandlet innen 30 minutter?

c) Angi nødvendige tilleggsantakelser og begrunn hvorfor $X(t)$ under de gitte antakelsene er en fødsels- og dødsprosess. Hva blir forventet tid (regnet fra $t = 0$) til det er 4 pasienter som venter på behandling?

Kl. 12 lørdag tilkalles Lege II som bruker en tid $T_2 \sim \exp(\mu_2)$ pr. pasient (uavhengig av Lege I). Dersom begge legene er ledige antas det like sannsynlig at neste pasient går til Lege I som Lege II. Vi skal i resten av oppgaven anta at legevakten er bemannet av begge legene og at vi ser på prosessen $X(t)$ i tidsrommet med konstant ankomstrate $\lambda = 5$ pasienter pr. time.

d) Dersom begge legene er opptatt, begrunn hvorfor forventet ventetid til en av legene blir ledig er lik $1/(\mu_1 + \mu_2)$. Tegn deretter opp et diagram over prosessen $X(t)$ som angir de ulike tilstandene for prosessen samt overgangsratene mellom disse. Er $X(t)$ en fødsels- og dødsprosess når

$$\text{i) } \mu_1 = \mu_2, \qquad \text{ii) } \mu_1 \neq \mu_2?$$

Begrunn svarene.

Anta nå at prosessen $X(t)$ har nådd et stasjonært nivå .

e) Anta i dette punktet at $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ og vis at grensesannsynligheten P_0 i dette tilfellet er gitt ved

$$P_0 = \frac{2\mu - \lambda}{2\mu + \lambda}$$

I hvilken andel av tiden er minst en av legene ledig dersom $\mu = 3$ pasienter pr. time?

f) Anta i dette punktet at $\mu_1 \neq \mu_2$. Vis at $X(t)$ er en tidsreversibel kjede og at grensesannsynligheten P_0 er gitt ved

$$P_0 = \frac{2\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2 - \lambda)}{\mu_1^2(2\mu_2 + \lambda) + \mu_2^2(2\mu_1 + \lambda)}$$

g) Anta nå at $\mu_1 = 3$ og $\mu_2 = 2.5$. I hvilken andel av tiden vil begge legene være ledige? I det lange løp, hva blir forventet inntekt pr. time for henholdsvis Lege I og Lege II dersom legene tjener kr. 230 pr. pasient?