



EKSAMENSOPPGAVE I STA-2001

Eksamen i : **STA-2001 Stokastiske prosesser**

Eksamensdato : **Torsdag 4. desember 2003**

Tid : **09:00 – 13:00**

Sted : **Samvirkegården 4. etg.**

Tillatte hjelpemidler : **- 4 håndskrevne sider**
- kalkulator
- Karl Rottman; Matematische Formelsammlung

Oppgavesettet er på 4 sider inkl. forside

Kontaktperson under eksamen: Edvin Bredrup, tlf 776 44017

DET MATEMATISK-NATURVITENSKAPELIGE FAKULTET

Universitetet i Tromsø, N-9037 Tromsø, Telefon 77 64 40 01, Telefaks 77 64 47 65

Oppgave 1

En hundeflokk i en kennel deler 2 store matfat. Matfatene fylles 1 gang om dagen.

På en tilfeldig dag, la X være mengden mat som spises fra fat 1, og la Y være mengden mat som spises fra fat 2.

Anta X og Y har simultan tetthet

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

a) Vis at $f(x, y)$ tilfredstiller kravene til en sannsynlighetstetthet.

b) Vis at Y har marginal sannsynlighetstetthet

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + \frac{1}{2} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og at

$$E(Y) = \frac{7}{12}$$

Hva blir marginal sannsynlighetstetthet til X , og hva blir $E(X)$?

Er X og Y uavhengige?

c) Vis at

$$E[X | Y = y] = \frac{3y+2}{6y+3} \quad 0 < y < 1$$

og finn $E[X | Y]$. Forklar hva denne størrelsen står for.

d) Bruk punktene b) og c) til å kontrollere at $E(X) = E(E(X | Y))$.

e) Vis at

$$E[X | Y > y] = \frac{7-y(4+3y)}{12-6y(y+1)} \quad 0 \leq y < 1$$

(Dette punktet bør kanskje utsettes til man har gjort resten av oppgavene)

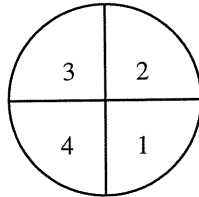
f) Sammenlign $E(X)$ med $E[X | Y > 0]$.

Prøv å forklare hvorfor de to størrelsene må være like.

Oppgave 2

En mus er plassert i et bur med 4 rom; rom 1, rom 2, rom 3 og rom 4. Ved korte mellomrom registreres hvilket rom musa er i.

Man tenker seg følgende modell: Når musa på et tidspunkt er i et rom, vil den i tidsenhet senere være i samme rom med sannsynlighet $1-2p$, den vil ha beveget seg mot klokka med sannsynlighet p og med klokka også med sannsynlighet p . Vi tenker oss at musa i løpet av en tidsenhet blir i samme rom eller beveger seg til et tilstøtende rom.



La X_n være rommet musa er i ved tidspunkt n .

- a) Begrunn at ett stegs overgangsmatrisen er gitt ved

$$P = \begin{bmatrix} 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \\ 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \end{bmatrix} \quad 0 < p < \frac{1}{2}$$

- b) Bestem klassene til Markovkjeden og avgjør om de er transiente, nullrekurrente eller positive rekurrente. Finn videre perioden til alle tilstandene.

Vi antar at musa er i rom 1 ved tiden $n=0$. Dvs. $P\{X_0 = 1\} = 1$.

- c) Hva er sannsynligheten for at musa er i rom 2 ved tidspunkt $n=2$?
Dvs. finn $P\{X_2 = 2\}$.

- d) Finn grensesannsynlighetene (stasjonærsannsynlighetene) $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$.
Prøv videre å forklare hva for eksempel størrelsen Π_3 står for.

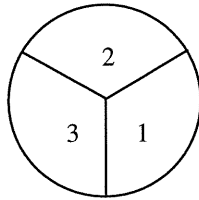
- e) Vis at hvis musa er i rom 1 så er forventet tid $E(T_{12})$ til den er i rom 2 gitt ved

$$E(T_{12}) = \frac{3}{2p}$$

- f) Anta musa på et tidspunkt er i rom 1.
Finn sannsynligheten for at den kommer til rom 3 før den kommer til rom 4.

Oppgave 3

En hamster plasseres i et bur med 3 rom; rom 1, rom 2 og rom 3.



Hamsteren beveger seg fra rom til rom der raten for overgang til rom j hvis den er i rom i . ($i \neq j$) er gitt ved q_{ij} .

Målinger har vist at

$$\begin{array}{lll} q_{12} = 2 & q_{21} = 2 & q_{31} = 2 \\ q_{13} = 3 & q_{23} = 2 & q_{32} = 1 \end{array}$$

Vi antar at oppholdstiden i et rom er eksponentielt fordelt, uavhengig av hvor hamsteren har vært tidligere. Tid måles i minutter.

- a) Gi en kort begrunnelse hvorfor hamsterens bevegelse fra rom til rom kan beskrives som en tidskontinuerlig Markovkjede. Gi også en begrunnelse på hvorfor denne prosessen ikke er en fødsel – død prosess.

La være S_k være ventetiden i rom k .

- b) Vis ved å bruke resultat fra læreboka at

$$E(S_1) = 0.20 \text{ (minutter)}$$

- c) Finn hvor stor del av tiden hamsteren befinner seg i hvert av de 3 rommene hvis vi følger den over lengre tid.

Anta rom 3 stenges slik at hamsteren bare beveger seg mellom rom 1 og rom 2.

- e) Blir prosessen nå en fødsel – død prosess?

Lykke til!