EKSAMENSOPPGAVE I STA-2003

Eksamen i	:	**STA-2003 Tidsrekker**
Eksamensdato	:	**Tirsdag 7. desember 2004**
Tid	:	**Kl 0900-1300**
Sted	:	**Samvirkegården, 4. etasje**
Tillatte hjelpemidler	:	**Fire sider notater samt kalkulator**

Oppgavesettet er på 2 sider ekskl. forside

Kontaktperson under eksamen: Elinor Ytterstad, tlf 44015

Oppgave 1

a) Gi betingelsene for at en tidsrekke er andreordens svakt stasjonær.

La $\{\varepsilon_t\}_{t=o}^{\infty}$ være en andreordens svakt stasjonær hvit støy prosess der $E(\varepsilon_t^2)=\sigma^2$ for alle $t \geq 0$

b) Skriv forventningsfunksjonen, autokovariansfunksjonen og autokorrelasjonsfunksjonen til $\{\varepsilon_t\}$.

Definer tidsrekken $\{X_t\}$ $t \in Z$ ved $X_t = \varepsilon_t + a \cdot \varepsilon_{t-1}$ $|a|<1$, $a \in R$

c) Vis at $\{X_t\}$er kovarians svakt stasjonær. Er betingelsene $|a|<1$ nødvendig for at så skal være tilfelle?

La $\{Y_t\}$ $t \in Z$

$Y_t = \varepsilon_t + b \cdot \varepsilon_{t-1}$ $b \in R$, $b \neq a$

Prosessen $\{\varepsilon_t\}$ er den samme som før. Det legges ingen andre betingelser på b enn at $b \in R$ og at $b \neq a$

d) Forklar hva spektraltetthet er og finn $f_X(\upsilon)$, $f_Y(\upsilon)$ spektraltetthetene til henholdsvis $\{X_t\}$ og $\{Y_t\}$

e) Vis hvordan $f_Y(\upsilon)$ er relatert til $f_X(\upsilon)$

f) Begrunn at $\{Y_t\}$ kan genereres ved å sende $\{X_t\}$ gjennom et ARMA(1,1) filter. Finn overføringsfunksjonen til filteret.

g) Vis at filteret i foregående punkt kan skrives på lineær form:

$$Y_t = \sum_{i=o}^{\infty} h_i X_{t-i}$$

og vis at $h_o = 1$, $h_i = (b-a)(-a)^{i-1}$ når $i > 0$

h) Hva slags prosess får man ved å sende hvit støy gjennom filteret i foregående punkt?

Oppgave 2

La $\{X_t\}$ og $\{Y_t\}$ være definert som i oppgave 1.

X_t skal predikeres enten ved $c \cdot X_{t-1}$ eller $d \cdot Y_{t-1}$, der c, d er konstanter. For å velge c og d minimeres $E(X_t - c \cdot X_{t-1})^2$ og $E(X_t - d \cdot Y_{t-1})^2$.

a) Vis at når $|a| < |b|$ bør $c \cdot X_{t-1}$ velges som prediktor og når $|a| > |b|$ så bør $d \cdot Y_{t-1}$ velges som prediktor.

Oppgave 3

Gitt prosessen $\{Z_t\}$ definert ved $Z_t - \frac{1}{2} Z_{t-1} - a = e_t$, $Var(e_t) = 1$

der t kan ta alle verdier fra de hele tall, a er en ukjent konstant, $\{e_t\}$ er en kovarians svakt stasjonær hvit støy prosess.

a) Vis at $\{Z_t\}$ er en kovarians svakt stasjonær prosess for alle a.
Bruk det du har lært om AR-prosesser.

b) Vis at $E(Z_t) = 2a$ for alle t.

c) Vis at $E(\overline{Z}_n) = 2a$ for alle $n > 0$, der $\overline{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t$.

d) Er $\{Z_t\}$ ergodisk i forventning. Begrunn.

e) Finn autokovariansfunksjonen $R(r)$ til $\{Z_t\}$

f) Vis at for store n er $Var(\overline{Z}_n) \approx 3\frac{R(0)}{n}$.

Ta utgangspunkt i formelen $Var(\overline{Z}_n) = \frac{1}{n} \sum_{r=-(n-1)}^{n-1} \left(1 - \frac{|r|}{n}\right) R(r)$.