Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 10, Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: ***Rekker, konvergens, potensrekker, annuitetsberegninger.***

Avsnitt 18.4 (s.508) oppg. 3:

Gitt $y(x) = \sin(x)$
Finn 3.- 4.- og 5.-ordens Taylor-polynomer for $y(x)$ omkring $x = 0$ (MacLaurin-rekker)

Løsning:
For å utvikle 5. ordens polynomer trenger vi alle deriverte t.o.m. femte.

$$y(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \underline{y(0) = 0}$$
$$y'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \underline{y'(0) = 1}$$
$$y''(x) = -\sin(x) \quad \Rightarrow \underline{y''(0) = 0}$$
$$y'''(x) = -\cos(x) \Rightarrow \underline{y'''(0) = -1}$$
$$y^{(4)}(x) = \sin(x) \Rightarrow \underline{y^{(4)}(0) = 0}$$
$$y^{(5)}(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \underline{y^{(5)}(0) = 1}$$

Disse verdiene kan vi så sette inn i den generelle formelen for Taylor-rekke utvikling:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (1)$$

For rekkeutvikling omkring $x=0$ kan vi bruke MacLaurin-rekka:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad (2)$$

For funksjonen $y(x) = \sin(x)$ får vi:

$$p_3(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!}x^3 = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

$$p_4(x) = p_3(x) = \underline{x - \frac{x^3}{6}}$$

$$p_5(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 = \underline{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

Avsnitt 18.4 (s.508) oppg. 3:

Gitt $y(x) = \cos(x)$
Finn 3.- 4.- og 5.-ordens Taylor-polynomer for $y(x)$ omkring $x = 0$ (MacLaurin-rekker)

Løsning:
Samme framgangsmåte som ovenfor gir:

$$p_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} = \underline{1 - \frac{x^2}{2}}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

$$p_5(x) = p_4(x) = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}$$

Avsnitt 18.4 (s.508) oppg. 9:

Gitt differensiallikningen:

$$y'' + y^2 = x^3 \quad \text{med startbetingelser}: \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = -1$$

a. Anslå $y(0{,}25)$ ved å benytte et 3.ordens Taylor-polynom.
b. Anslå $y(0{,}25)$ ved å benytte et 4.ordens Taylor-polynom.

Løsning:

For å finne et 4.ordens Taylor polynom trenger vi 2.- 3.- og 4.-deriverte:

$$y'' = -y^2 + x^3 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = -(y(0))^2 + 0 = -1$$
$$y''' = -2y \cdot y' + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -2y(0) \cdot y'(0) + 0 = 2$$
$$y^{(4)} = -2(y')^2 - 2y \cdot y'' + 6x \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = -2(-1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) = 0$$

At den 4. deriverte er null betyr at 4.-ordens polynomet er det samme som tredje-ordens-polynomet. Vi svarer derfor på begge spørsmål ved å finne 3. ordens polynomet. Vi bruker den generelle formelen for en MacLaurin-rekke.

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Rightarrow \underline{p_3(0{,}25) = 0{,}724}$$

Avsnitt 18.6 (s.518) oppg. 3:
Bruk MacLaurin-rekka for e^x til å rekkeutvikle funksjonen $f(x) = 1/e^x$

Løsning:

$$f(x) = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

Rekka for e^x ser slik ut:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Denne rekka er gyldig for alle x og er en av de viktigste rekkene vi har, og lett å huske.
Hvis vi erstatter x med $-x$ i formelen får vi:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + - \cdots$$

Avsnitt 18.6 (s.519) oppg. 6:
Bruk MacLaurin-rekka for e^x til å rekkeutvikle funksjonen $f(x) = xe^x$

Løsning:
Den samme teknikken kan brukes her:

$$f(x) = xe^x = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$xe^x = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$$

"Review exercises" 18 (s.519) oppg. 3:
Lineariser funksjonen :

$y(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$ omkring $t = 1$

Løsning:
Linearisering får vi bruk for i alle elektrotekniske fag. Metoden består i å ta utgangspunkt i de to første leddene i Taylor-rekka:

$$\underline{y(t) \approx y(a) + \dot{y}(a) \cdot (t - a)}$$

Vi har : $\dot{y}(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct + d$ og dermed :

$$y(1) = a + b + c + d + e$$
$$\dot{y}(1) = 4a + 3b + 2c + d$$

$$\Rightarrow y(t) \approx (a + b + c + d + e) + (4a + 3b + 2c + d)(t - 1)$$
$$\Rightarrow \underline{y(t) \approx (4a + 3b + 2c + d) \cdot t + (-3a - 2b - c + e)}$$

"Review exercises" 18 (s.519) oppg. 5:
Lineariser funksjonen :

$z(t) = e^t$ omkring $t = 1$

Løsning:
Den samme teknikken brukes her:

$$z(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = e^t$$
$$z(t) \approx z(1) + \dot{z}(1) \cdot (t - 1)$$
$$\underline{\underline{z(t) \approx e + e \cdot (t - 1) = t \cdot e}}$$

Prøv sjøl denne formelen for verdier av t omkring $t = 1$
for eksempel $t = 1{,}05$ gir: $e^{1{,}05} \approx 2{,}858 \quad t \cdot e \approx 2{,}854$

"Review exercises" 18 (s.519) oppg. 6:

Gitt følgende differensiallikning med startbetingelser:

$$y'' + xy' - 3y = x^2 + 1$$
$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$$

a. Finn $y''(0)$
Vi skriver om den gitte differensial-likning og setter $x = 0$:

$$y'' = 3y - xy' + x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{y''(0) = 3y(0) + 1 = 4}$$

b. Deriver den gitte differensiallikning.

$$\underline{y'''} = 3y' - y' - xy'' + 2x = \underline{2y' - xy'' + 2x}$$

c. Finn $y^{(3)}(0)$
Her setter vi inn $x = 0$ i likningen ovenfor:

$$\underline{y'''(0)} = 2y'(0) = \underline{4}$$

d. Finn en tredje grads tilnærmelse til *y(x)*.
Her tar vi utgangspunkt i MacLaurinrekka t.o.m. 3.-grads leddet:

$$p_3(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) \approx 1 + 2x + 2x^2 + \tfrac{2}{3}x^3}$$

e. Finn (tilnærmet) y(0,5).
Her setter vi ganske enkelt inn $x = 0{,}5$ i formelen ovenfor og får $\underline{y(0{,}5) \approx 2{,}5833}$