Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 11, Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: Rekker og rekkeutvikling.

1) Oppgaver fra læreboka

Rev. ex. 6 (s.199) oppg. 3:

Gitt Fibonacci rekka : 1, 1, 2, 3, 5, 8,… hvor $x[k+1] = x[k] + x[k-1]$ (1)
Vis at:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x[k+1]}{x[k]} = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$$

Denne grensa svarer til det som kalles det gylne snitt, dvs løsningen på likningen:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Hvis det virkelig er slik at forholdet mellom et ledd i rekka og det foregående konvergerer mot et tall φ gjelder følgende når vi er kommet "tilstrekkelig langt" ut i rekka:

$x[k+1] = \varphi \cdot x[k]$ og $x[k] = \varphi \cdot x[k-1]$

Vi setter dette inn i definisjonen (1) og får:

$\varphi \cdot x[k] = \varphi \cdot x[k-1] + x[k-1]$

På venstre side kan vi sette inn en gang til:

$\varphi^2 \cdot x[k-1] = \varphi \cdot x[k-1] + x[k-1] \Rightarrow$

$\varphi^2 = \varphi + 1 \Rightarrow \underline{\varphi^2 - \varphi - 1 = 0}$ som gir $\underline{\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)}$

Rev. ex. 6 (s.199) oppg. 14:
For en geometrisk rekke har vi:

$S_3 = \frac{37}{8} \quad S_6 = \frac{3367}{512}$

Finn det første tallet i rekka *a*, og forholdstallet *r*

Vi tar utgangspunkt i formelen for summen av en geometrisk rekke på side 189:

$S_k = \frac{a\left(1-r^k\right)}{1-r}$ som gir:

$S_3 = \frac{a\left(1-r^3\right)}{1-r}$ og $S_6 = \frac{a\left(1-r^6\right)}{1-r}$

Fra den første av disse to formlene får vi:

$a = \frac{S_3\left(1-r\right)}{\left(1-r^3\right)}$ som vi setter inn i den andre og får:

$\frac{S_3\left(1-r\right)}{\left(1-r^3\right)} \cdot \frac{\left(1-r^6\right)}{\left(1-r\right)} = S_6$ Setter $x = r^3$ og får:

$\frac{S_3\left(1-x^2\right)}{\left(1-x\right)} = S_6 \Rightarrow \underline{S_3x^2 - S_6x + S_6 - S_1 = 0}$

Løsningen på denne 2.grads likningen blir: $\underline{x = \frac{27}{64} \Rightarrow r = \sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}}$

og dermed $\underline{a = \frac{S_3\left(1-r\right)}{\left(1-r^3\right)} = 2}$

Kontroll for S_3: $S_3 = 2 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \underline{\frac{37}{8}}$

Rev. ex. 18 (s.519) oppg. 1:
Gitt: *f(3) = 2 f'(3) = -1 f''(3) = 1*
Finn 2.ordens Taylor-rekke for funksjonen *f(t)* omkring *t = 3.*

Vi har:

$$p_2(t) = f(3) + \dot{f}(3)\cdot(t-3) + \ddot{f}(3)\frac{(t-3)^2}{2!}$$

$$\underline{p_2(t)} = 2 - (t-3) + \frac{(t-3)^2}{2} = \underline{\tfrac{1}{2}t^2 - 4t + \tfrac{19}{2}}$$

Rev. ex. 18 (s.519) oppg. 11:
Gitt: $y(x) = x^2$ Denne funksjonen skal utvikles som Taylor-rekke omkring $x = a$

$y(x) = x^2 \quad y'(x) = 2x \quad y''(x) = 2 \quad y^{(n)}(x) = 0$ for alle $n > 2$
Vi får da:

$$y(x) = y(a) + y'(a)(x-a) + y''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + 0 + 0 + \cdots$$

$$y(x) = a^2 + (2a)(x-a) + 2\cdot\frac{(x-a)^2}{2}$$

$$\underline{y(x)} = a^2 + 2ax - 2a^2 + x^2 - 2ax + a^2 = \underline{x^2}$$

Maclaurinrekka vil gi akkurat samme resultat siden den bare er et spesialtilfelle av Taylor-rekka ($a = 0$).
Resultatet kan forklares med at Taylorrekkeutvikling er beregnet på *andre typer funksjoner* dvs. hensikten er å *tilnærme* trigonometriske-, logaritmiske-, eksponensielle-funksjoner osv. som *polynomer*, dvs. potensrekker. I dette tilfelle er jo funksjonen en potens-"rekke" i utgangspunktet, nemlig $y(x) = 0 + 0x + x^2 + 0x^3 + 0x^4 + \ldots$
Det har med andre ord ingen hensikt å utvikle polynomer som Taylor- eller Maclaurin-rekker.

Rev. ex. 18 (s.519) oppg. 12:
Funksjonen $y(x) = \ln(x + 2)$ skal utvikles som 4.ordens Maclaurin-rekke.

$$y(x) = \ln(x+2) \quad y'(x) = \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1}$$

$$y''(x) = -(x+2)^{-2} \quad y'''(x) = 2(x+2)^{-3}$$

$$y^{(4)}(x) = -6(x+2)^{-4}$$ Dette gir:

$$y(0) = \ln(2) \quad y'(0) = \tfrac{1}{2} \quad y''(0) = -\tfrac{1}{4}$$

$$y'''(0) = \tfrac{1}{4} \quad y^{(4)}(0) = -\tfrac{3}{8}$$

$$\Rightarrow p_4(x) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3!} - \tfrac{3}{8}\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$\underline{p_4(x) = \ln(2) + \tfrac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{64}}$$

2) Eulers formel

Maclaurinrekka for e^x :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

som er gyldig for alle x, vi kan dermed sette f.eks $x = \mathrm{j}v$

Dette gir:

$$e^{\mathrm{j}v} = 1 + \mathrm{j}v + \frac{(\mathrm{j}v)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{j}v)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{j}v)^4}{4!} + \cdots$$

Med $\mathrm{j}^2 = 1 \quad \mathrm{j}^3 = -\mathrm{j} \quad \mathrm{j}^4 = 1$ får vi:

$$e^{\mathrm{j}v} = 1 + \mathrm{j}v - \frac{v^2}{2!} - \mathrm{j}\frac{v^3}{3!} + \frac{v^4}{4!} + \cdots \Rightarrow$$

$$e^{\mathrm{j}v} = \left(1 - \frac{v^2}{2!} + \frac{v^4}{4!} - \frac{v^6}{6!} + \cdots\right) + \mathrm{j}\cdot\left(v - \frac{v^3}{3!} + \frac{v^5}{5!} - \cdots\right) \Rightarrow$$

$$\underline{e^{\mathrm{j}v} = \cos(v) + \mathrm{j}\cdot\sin(v)}$$

3) Relativistisk energilikning: $E = mc^2$

Rekkeutvikling av relativitsteoriens formel for kinetisk energi:

$$E_k = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right) \quad \text{hvor } x = -\left(\tfrac{v}{c}\right)^2$$

Vi ser at det dreier seg om å rekkeutvikle $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$

I følge binomialformelen får vi:

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{8}x^2 - \tfrac{5}{16}x^3 + \cdots \quad \text{setter så inn } x = -\left(\tfrac{v}{c}\right)^2 :$$

$$f(x) = 1 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{v}{c}\right)^2 + \tfrac{3}{8}\left(\tfrac{v}{c}\right)^4 + \tfrac{5}{16}\left(\tfrac{v}{c}\right)^6 + \cdots \quad \text{som gir:}$$

$$\underline{E_k = m_0\left(\frac{v^2}{2} + \frac{3\cdot v^4}{8\cdot c^2} + \frac{5\cdot v^6}{16\cdot c^4} + \cdots\right)}$$

For normale hastigheter blir alle ledd unntatt det første forsvinnende små og formelen blir dermed identisk med den klassiske.

Det neste spørsmålet gjaldt hvor stor hastigheten *v* må bli før den klassiske formelen ikke lenger er brukbar (med 99,9 % nøyaktighet). Dette finner vi enklest ut ved kun å betrakte første og andre ledd i formelen ovenfor da de etterfølgende ledd er enda mer ubetydelige. Kravet til 99,9 % nøyaktighet kan da uttrykkes som:

$$\frac{3v^4}{8c^2} \leq 0,001\frac{v^2}{2} \Rightarrow \underline{v \leq 0,0365c \approx 11000\,\mathrm{km/s}}$$

Vi kan med andre ord se helt bort fra relativitetsteorien bortsett fra helt ekstraordinære forhold.