Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Institutt for elektroteknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 1, Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: ***1. og 2. ordens lineære differensial-likninger***

Oppgaver fra læreboka:

Avsnitt 19.4.4 (s.546): Oppg. 2a:

Løs differensiallikningen :

$y' + 4y = 7 \quad y(0) = 1$

Homogen løsning : $y_H = Ce^{\lambda x}$ Dette gir den karakteristiske likning :

$\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = -4} \Rightarrow \underline{y_H = Ce^{-4x}}$

Partikulær løsning : $y_P = K$ (siden vi har konstant drivfunksjon)

Dette gir : $y' = 0$ Vi setter så inn i den opprinnelige diff. likning :

$0 + 4K = 7 \Rightarrow K = y_P = 7/4 = 1{,}75$ Den generelle løsning blir da :

$\underline{y = y_H + y_P = Ce^{-4x} + 1{,}75}$

Vi finner til slutt integrasjonskonstanten C ved å sette inn startbetingelsen :

$y(0) = C + 1{,}75 = 1 \Rightarrow C = -0{,}75$ Dermed har vi løsningen :

$\underline{\underline{y = 1{,}75 - 0{,}75e^{-4x}}}$

Avsnitt 19.4.4 (s.546): Oppg. 2b:

Løs følgende differensiallikning:

$\dot{x} - x = 4 \quad x(0) = 2$

Homogen løsning : $x_H = Ce^{\lambda t}$

Kar. likn : $\lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow x_H = Ce^t$

Par. løsn : $x_P = K \Rightarrow \dot{x}_P = 0 \Rightarrow 0 - K = 4$

$\underline{K = x_P = -4}$

Generell løsning : $x = Ce^t - 4$

Startbetingelse : $x(0) = C - 4 = 2 \Rightarrow C = 6$

Dermed : $\underline{\underline{x = 6e^t - 4}}$

Avsnitt 19.5.6 (s.567-568): Oppg.8 med endringer.

Endringer til oppg. 8:

E(t) = 5V som slås på ved *t* = 0, *ikke* vekselspenning
Vis at vi får den oppgitte differensiallikning.
Løs denne dvs. finn $i_2(t)$. Plott løsningen $i_2(t)$ på rutepapir.

a. *Opprinnelige parametre:* R = 10Ω L = 1mH C = 1μF

Først må vi finne differensiallikningen som beskriver kretsen (jfr. fig. 19.8):

$(1) \quad i = i_1 + i_2$

$(2) \quad E = Ri + L\dot{i}_2 = Ri_1 + Ri_2 + L\dot{i}_2$

$(3) \quad u_C = \frac{1}{C}\int i_1 dt = L\dot{i}_2 \Rightarrow \underline{i_1 = LC\ddot{i}_2}$

Setter (3) inn i (2) og får :

$(4) \quad \underline{RLC\ddot{i}_2 + L\dot{i}_2 + Ri_2 = E}$

Dette er den oppgitte differensiallikning.

Homogen løsning:

$(5) \quad i_{2H} = Ce^{\lambda t}$

Karakteristisk likning:

$(6) \quad RLC\lambda^2 + L\lambda + R = 0$

Som gir:

$(7) \quad \lambda = \frac{1}{2RLC}\left(-L \pm \sqrt{L^2 - 4R^2LC}\right)$

Med de oppgitte parameterverdier får vi da:

$\lambda_1 = -11270 \qquad \lambda_2 = -88730$

Dette gir 2 tidskonstanter:

$T_1 = \frac{1}{|\lambda_1|} = \frac{1}{11270} \approx 88{,}7\,\mu s \qquad T_2 = \frac{1}{|\lambda_2|} = \frac{1}{88730} \approx 11{,}3\,\mu s$

Den homogene løsningen blir:

$(8) \qquad i_{2H} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$

Partikulærløsning:

$(9) \qquad i_{2P} = K \quad (\text{konstant drivfunksjon}) \Rightarrow \dot{i}_{2P} = 0 \quad \ddot{i}_{2P} = 0$

Vi setter inn i den opprinnelige likningen og får:

$(10) \qquad RK = E \Rightarrow K = i_{2P} = \frac{E}{R} = 0{,}5\ [\text{A}]$

Den generelle løsning bli da:

$(11) \qquad i_2 = i_{2H} + i_{2P} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + 0{,}5$

Startbetingelsene er:

$(12) \qquad i_2(0) = 0 \qquad \dot{i}_2(0) = 0$

Først må vi derivere (11):

$(13) \qquad \dot{i}_2 = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t}$

Vi setter inn $t = 0$ i (11) og (13):

$(14) \qquad C_1 + C_2 + 0{,}5 = 0$

$(15) \qquad \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} C_1$

$\Rightarrow \qquad C_1\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right) = -0{,}5 \Rightarrow \underline{C_1} = \frac{0{,}5\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \approx \underline{-0{,}573} \quad \underline{C_2 = 0{,}073}$

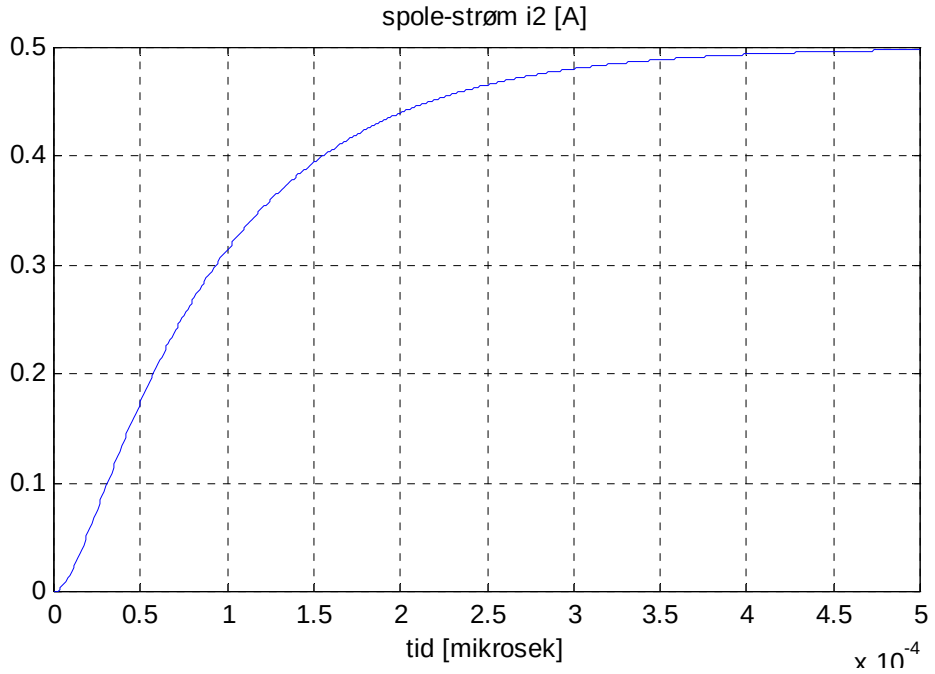
Løsningen blir :

$(16) \qquad \underline{\underline{i_2 = 0{,}5 - 0{,}573 e^{t/T_1} + 0{,}073 e^{t/T_2}}}$

Denne funksjonen kan plottes i Matlab f.eks på følgende måte:

```
» L1=-11270; L2=-88730;
» t=linspace(0,500e-6,500);
» i2=0.5-0.573*exp(L1*t)+0.073*exp(L2*t);
» plot(t,i2), grid
» title('spole-strøm i2 [A]'); xlabel('tid [mikrosek]');
```

Vi får fram følgende diagram (se neste side):



a. *Nytt parametersett:* **R = 100Ω** L = 1mH C = 1μF

Den karakteristiske likning er uforandret og demed får vi den samme løsning som før, se likning (7). Siden R er forandret får vi nye λ-verdier og disse blir komplekse:

(17) $\lambda_1 = -5000 + j\cdot 31225 \quad \lambda_2 = -5000 - j\cdot 31225$): $\alpha = -5000 \quad \beta = 31225$

Vi får med andre ord *dempet svingning* med tidskonstant $T = 1/5000 = 200\ \mu s$
og svingefrekvens $\beta = 31225$ (rad7sek) Svingetid $T_P = 2\pi/\beta \approx 201\ \mu s$

Homogen løsning:

$$(18) \qquad i_{2H} = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$$

Partikulær løsning (som før): $K = E/R = 50$ [mA]
Generell løsning:

$$(19) \qquad i_2 = 50 + e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$$

Her må vi også derivere før vi kan løse for start betingelser:

$$(20) \qquad \dot{i}_2 = \alpha e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + e^{\alpha t}\left(-\beta A\sin(\beta t) + \beta B\cos(\beta t)\right)$$

Nå kan vi sette inn for startbetingelsene og vi får:

$$(21) \qquad 50 + A = 0 \qquad \alpha A + \beta B = 0$$

som gir :

$$A = -50 \qquad B \approx -8$$

$$(22) \qquad \underline{\underline{i_2 = 50 - e^{-t/T}\left(50\cos(\beta t) + 8\sin(\beta t)\right)}}$$

Strømforløpet i spolen blir nå slik:

