Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Institutt for elektroteknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 2, Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: ***Løsning av diff.-liknings systemer***

Oppgave 1 (løsning for hånd)

RLC-kretsen i oppgaven beskrives av differensiallikningene:

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C} i \qquad (1)$$

$$\dot{i} = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i \qquad (2)$$

med startbetingelser :

$u_C(0) = 10\,(\text{V}) \quad i(0) = 0\,(\text{A})$

Dette systemet er *udrevet* dvs. vi har ingen drivfunksjon og vi trenger derfor ikke finne partikulær-løsning. Fra likning (1) har vi:

$$i = C\dot{u}_C \Rightarrow \dot{i} = C\ddot{u}_C \qquad (3)$$

vi setter inn i likning (2) og får :

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = 0 \qquad (4)$$

Homogen løsning : $u_{CH} = K \cdot e^{\lambda t}$

Dette gir *den karakteristiske likning:*

$$LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 = 0 \qquad (5)$$

Denne løses mht λ og vi får:

$$\lambda = \frac{1}{2LC}\left(-RC \pm \sqrt{(RC)^2 - 4LC}\right) \qquad (6)$$

Vi setter inn parameterverdiene: R = 100 (Ω) L = 1,0 (mH) C = 2,0 (μF) som gir:

$\lambda_1 = -5279 \quad \lambda_2 = -94721$

Løsningen blir altså:

$$\underline{u_C = K_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 t}}$$

Fra likn (3) får vi :

$$\underline{\mathrm{i} = \mathrm{C}\left(\lambda_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 K_2 e^{\lambda_2 t}\right)}$$

Vi setter inn startbetingelsene $u_C(0) = 10$, $i(0) = 0$ og løser for K_1 og K_2 . Resultatet blir:

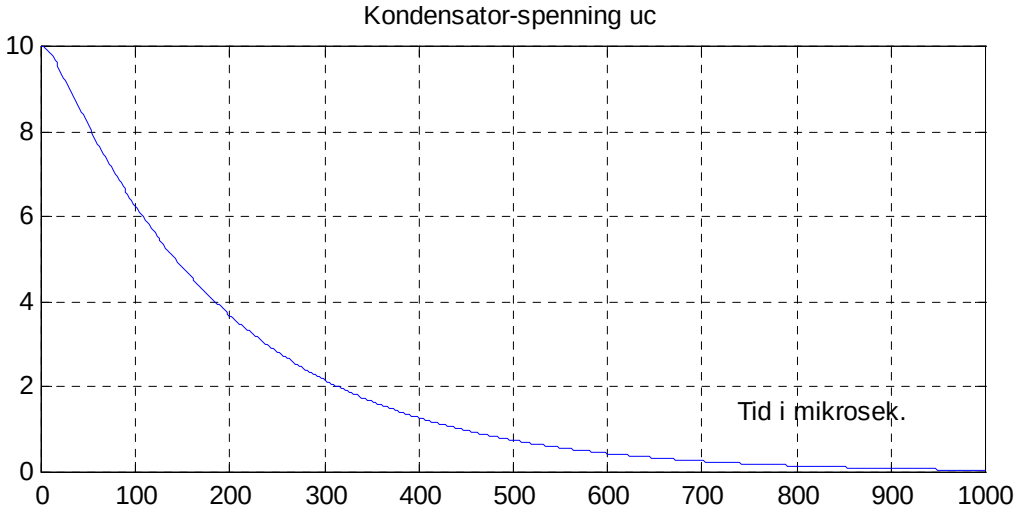
$$\underline{u_C = 10{,}59 \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} - 0{,}59 \cdot e^{-\frac{t}{T_2}}}$$

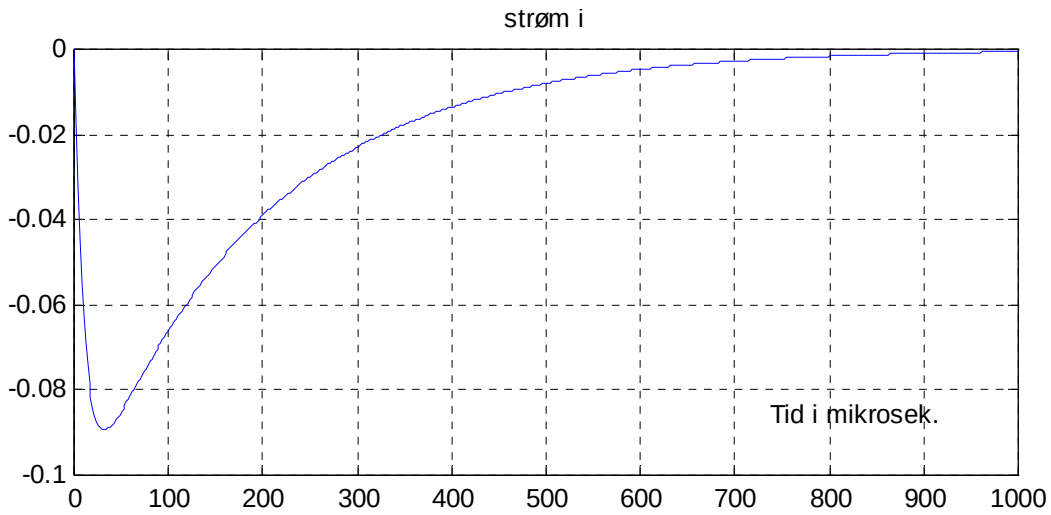
$$\underline{i = 0{,}112\left(e^{-\frac{t}{T_2}} - e^{-\frac{t}{T_1}}\right)}$$

$$T_1 = \left|\frac{1}{\lambda_1}\right| \approx 189{,}4\mu s \quad T_2 = \left|\frac{1}{\lambda_2}\right| \approx 10{,}56\mu s$$

Disse funksjonene kan enkelt plottes i f.eks.Matlab (eller TI-89) :

```
» t=[0:2:1000];
» T1=189.4; T2=10.56;
» uc=10.59*exp(-t/T1)-0.59*exp(-t/T2);
» i=0.112*(exp(-t/T2)-exp(-t/T1));
» plot(t,uc), grid
» Title('Kondensator-spenning uc')
» plot(t,i), grid
» title('strøm i')
```





b. *Motstanden i kretsen reduseres fra 100 Ω til 10 Ω.*

Her er kretsen uforandret, dvs. den karakteristiske likningen blir den samme som før og løsningen (6) er fortsatt gyldig. Siden R er forandret vil vi få andre tallverdier for λ.
Vi får:

$$\lambda = -5000 \pm j \cdot 94721 \equiv \alpha \pm j\beta$$

Kompekse røtter tilsier at vi får dempede svingninger og vi kan sette opp løsningen på formen:

$$u_C(t) = e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right)$$

Fortsatt gjelder : $i = Cu_C$:

$$i(t) = C\left[\alpha e^{\alpha t}\left(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)\right) + \beta e^{\alpha t}\left(-A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)\right)\right]$$

$$i(t) = Ce^{\alpha t}\left[(\alpha A + \beta B)\cos(\beta t) + (\alpha B - \beta A)\sin(\beta t)\right]$$

Vi setter inn start verdier og får tilslutt:

$$u_C(t) = e^{-\frac{t}{T}}\left(10\cos(\beta t) + 2{,}294\sin(\beta t)\right)$$

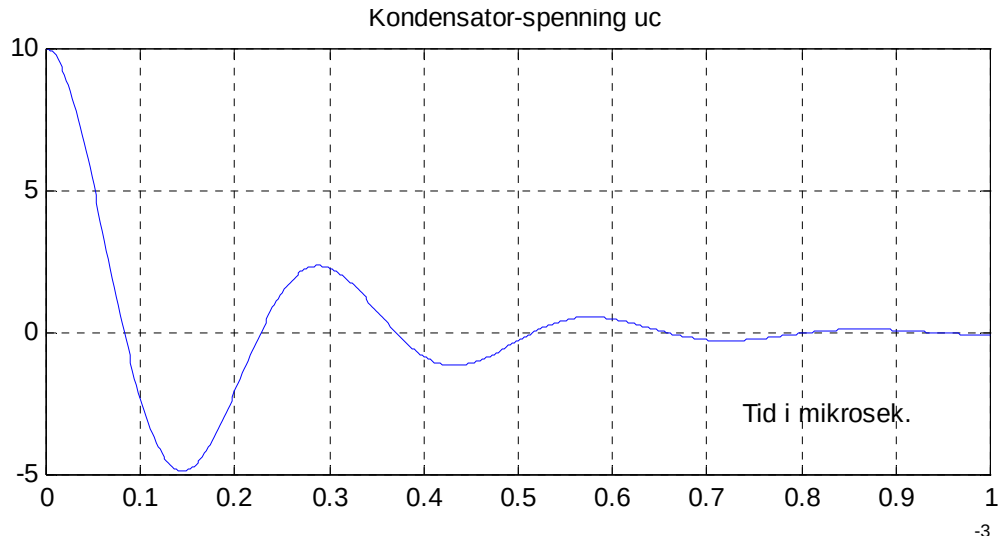
$$i(t) = -0{,}4588e^{-\frac{t}{T}}\sin(\beta t)$$

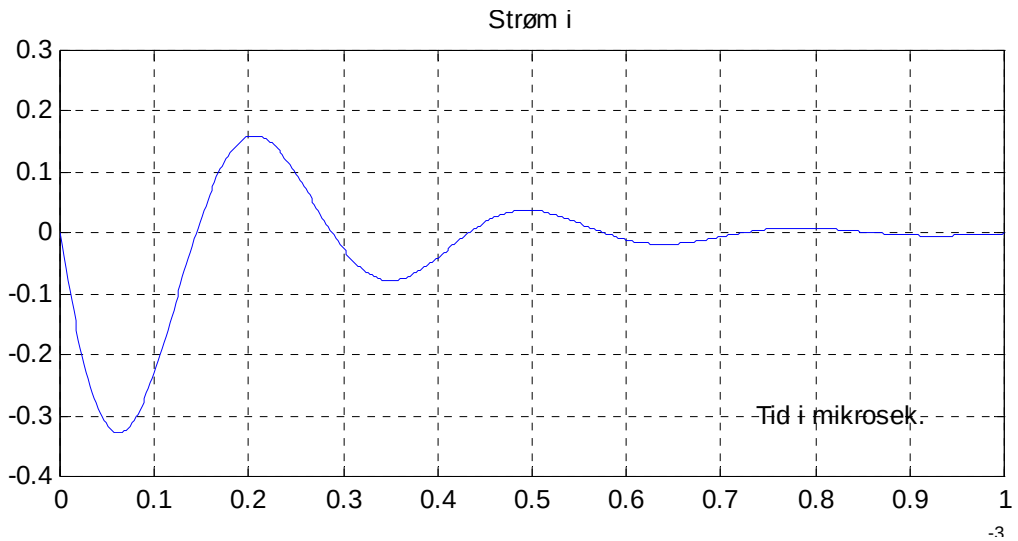
Hvor :

$$T = \left|\frac{1}{\alpha}\right| = 200\,\mu\text{s} \qquad \beta = 21794\ \text{rad/sek}$$

Vi plotter kurvene:

```
» T=200e-6; b=21794;
» t=[0:2e-6:1e-3];
» uc=exp(-t/T).*(10*cos(b*t)+2.294*sin(b*t));
» i=-0.4588*exp(-t/T).*sin(b*t);
» plot(t,uc), grid
» title('Kondensator-spenning uc')
» plot(t,i), grid
» title('Strøm i')
```





Oppgave 2

a) *Symbolsk løsning*

Differensiallikningssystemet:

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C} i = 5 \cdot 10^5 i \qquad (7)$$

$$\dot{i} = -\frac{1}{L} u_C - \frac{R}{L} i = -10^3 u_C - 10^5 i \qquad (8)$$

med startbetigelser:

$u_C(0) = 10$ (V) $\quad i(0) = 0$ (A)

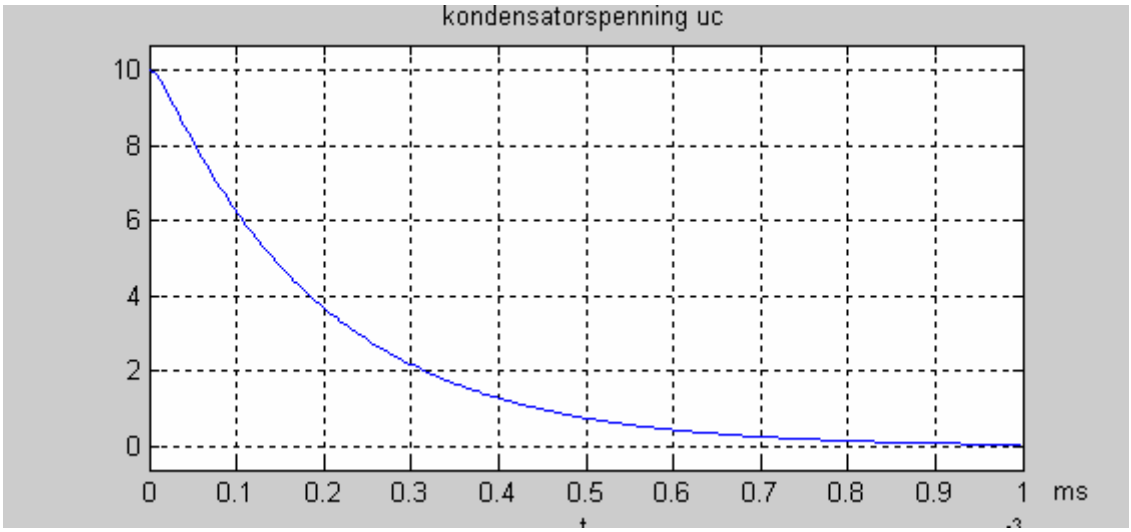
Vi definerer to tilstander: $u_C = x_1 \quad i = x_2$
Vi løser likningene symbolsk vha kommandoen **dsolve** i Matlab:

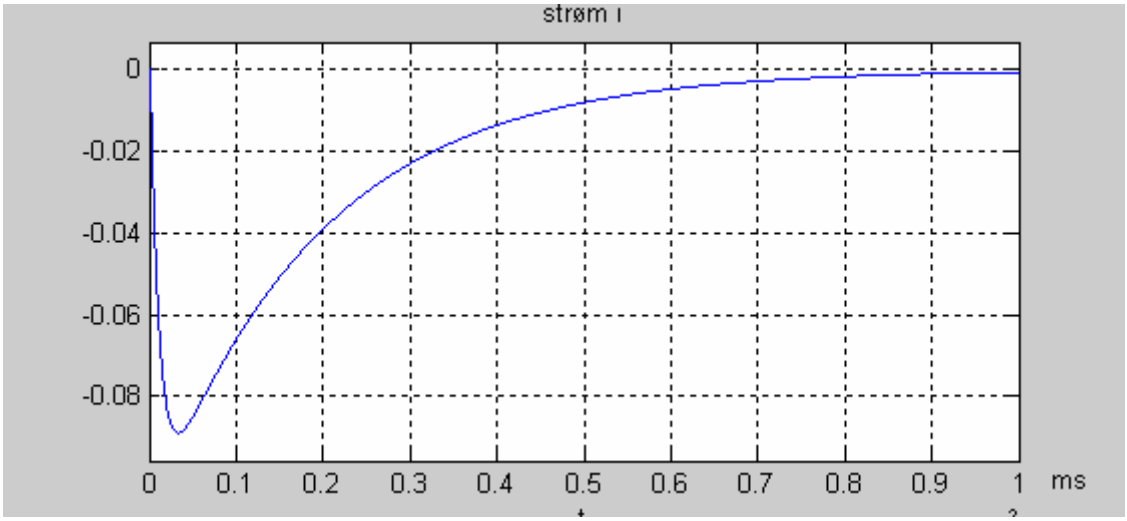
```
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=(5e5)*x2','Dx2 = -1000*x1-(1e5)*x2','x1(0)=10','x2(0)=0')
```

Resultatet plottes vha. **ezplot** :

```
>> ezplot(x1,[0 0.001])
>> grid
>> title('kondensatorspenning uc')
>>
>> figure(2)
>> ezplot(x2,[0 0.001])
>> grid
>> title('strøm i')
```

Dette gir to plott som er vist på neste side:





Vi ser at dette stemmer helt med det som vi sjøl har funnet i oppgave 1.

R redusert til 10 Ω:

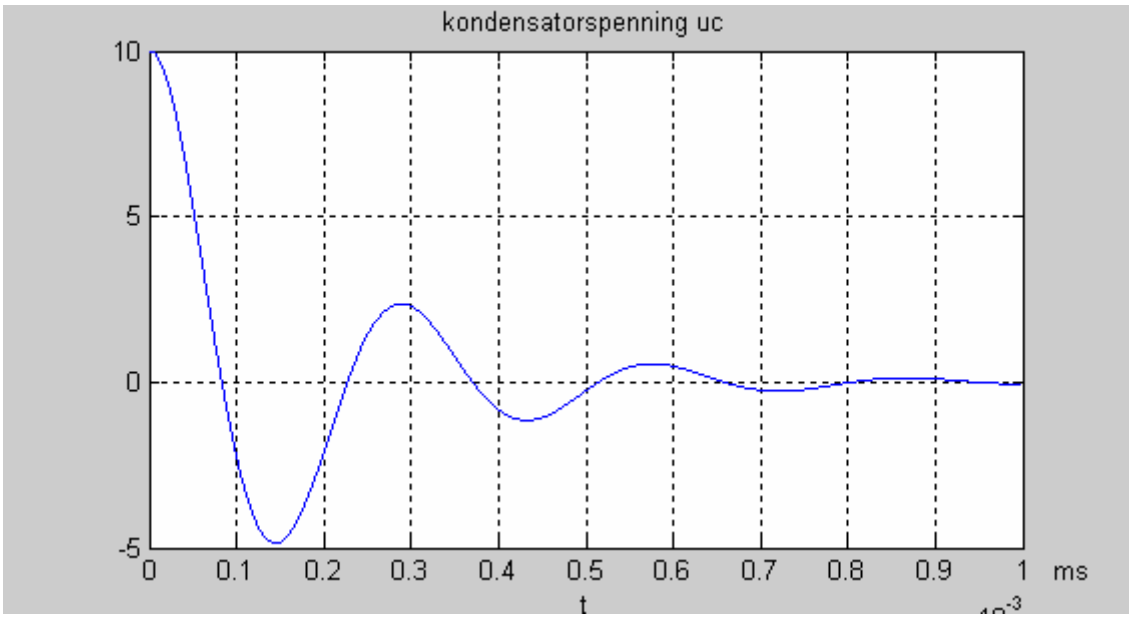
Dette vil kun forandre likning (8) hvor vi nå får:

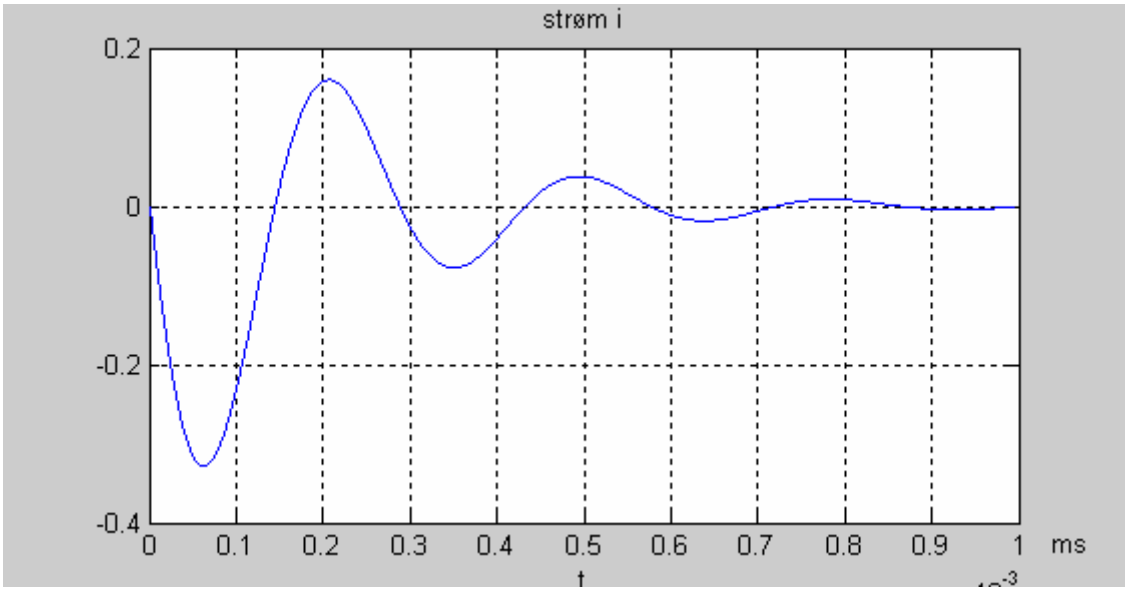
$$\dot{i} = -10^3 u_C - 10^4 i \qquad (9)$$

Vi heter fram den forrige **dsolve**-kommandoen i Matlab vha pil-opp tasten, gjør den nødvendige forandringen (uthevet her) og får:

```
>> [x1,x2]=dsolve('Dx1=(5e5)*x2','Dx2 = -1000*x1-(1e4)*x2','x1(0)=10','x2(0)=0')
```

Resultatet er vist på de neste diagrammene og igjen ser vi full overensstemmelse med det tidligere resultatet:


kondensatorspenning uc
10
5
0
-5
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ms
t


strøm i
0.2
0
-0.2
-0.4
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
ms
t

Numerisk løsning (simulering) med tistandsrom-modell:

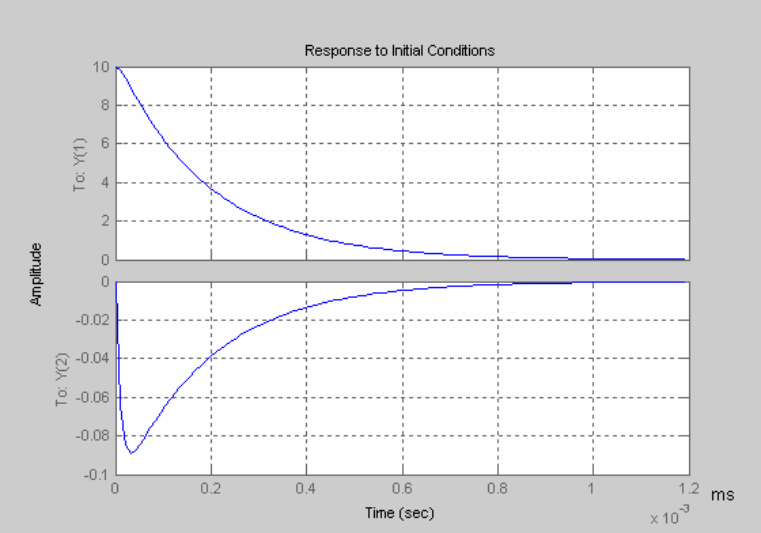
Systemlikningene (7) og (8) kan skrives på tilstandsform:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$$

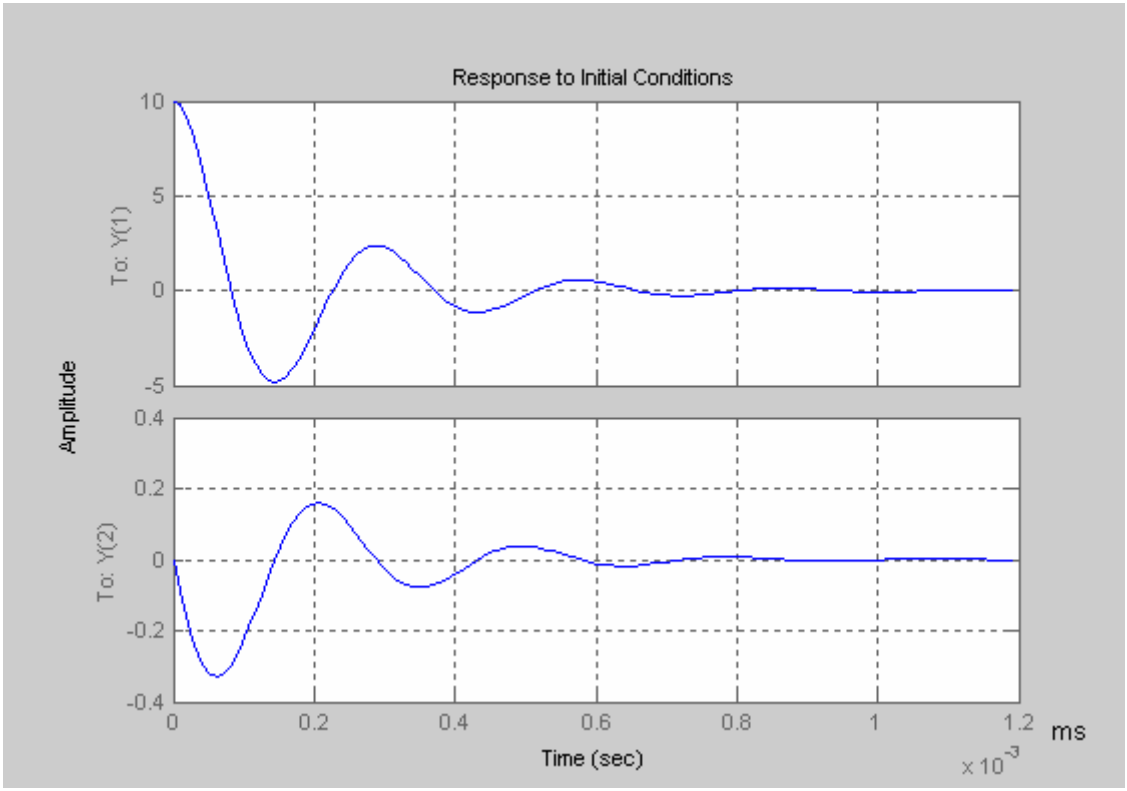
$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i \end{pmatrix} \quad \text{med} \quad \begin{pmatrix} u_C(0) \\ i(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Framgangsmåten i Matlab blir da:

```
>> R=100; L=1e-3; C=2e-6;
>> A=[0 1/C ; -1/L -R/L];
>> B=[0;0]; D=eye(2); E=B;
>> sys1=ss(A,B,D,E);
>> x0=[10,0]';
>> initial(sys1,x0)
```



Deretter kan *R* forandres til 10 og de samme kommandoene kjøres om igjen. Vi får:



Også her får vi full overensstemmelse med tidligere resultater. Hviken metode som velges kommer an på sammenhengen. For større systemer er tilstandsrom-beskrivelsen ofte den enkleste og raskeste veien til målet. Skal funksjonene analyseres matematisk kreves en symbolsk løsning.

En tredje metode som ikke er tatt med i denne øvingen er simulering med **Simulink**. Dette er fordelaktig for kompekse systemer som det skal jobbes mye med. Simulink modeller er mye mer "gjennomsiktige" enn andre løsningsmåter, gir stor fleksibilitet mht. å foreta endringer, enkle muligheter til å se på signaler på alle nivå, og ikke minst muligheter for å simulere ulineariteter.