Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for Teknologi
Program for Elektro- og Datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 3 – 2004
(Obligatorisk)

Leveringsfrist: søndag 10.10.04 kl 235

Løsningsforslag

Differensiallikninger : Simulering med blokkdiagrammer i Simulink
Simulering med tilstandsrom-modell i Matlab

Oppgave 1 Gitt 1.ordens likningen:

$RC\dot{u}_C + u_C = E$ hvor $R = 500\ \text{k}\Omega$ $C = 10\ \mu\text{F}$ $E = 20\text{V}$

Startbetingelse: $u_C(0) = 0$

a) *Symbolsk løsning*

Vi velger å løse likningen med Laplace-transformasjonen:

Først må likningen transformeres:

$RC\left(sU_C(s) - u_C(0)\right) + U_C(s) = \frac{E}{s}$ siden $u_C(0) = 0$ får vi:

$$\left(RCs+1\right)U_C(s) = \frac{E}{s} \Rightarrow \underline{U_C(s) = \frac{E}{s\left(RCs+1\right)}} = \frac{\frac{1}{RC}E}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)} = \underline{\frac{aE}{s\left(s+a\right)}}$$

Hvor $a = \frac{1}{RC} = 0,2$ Dette gir:

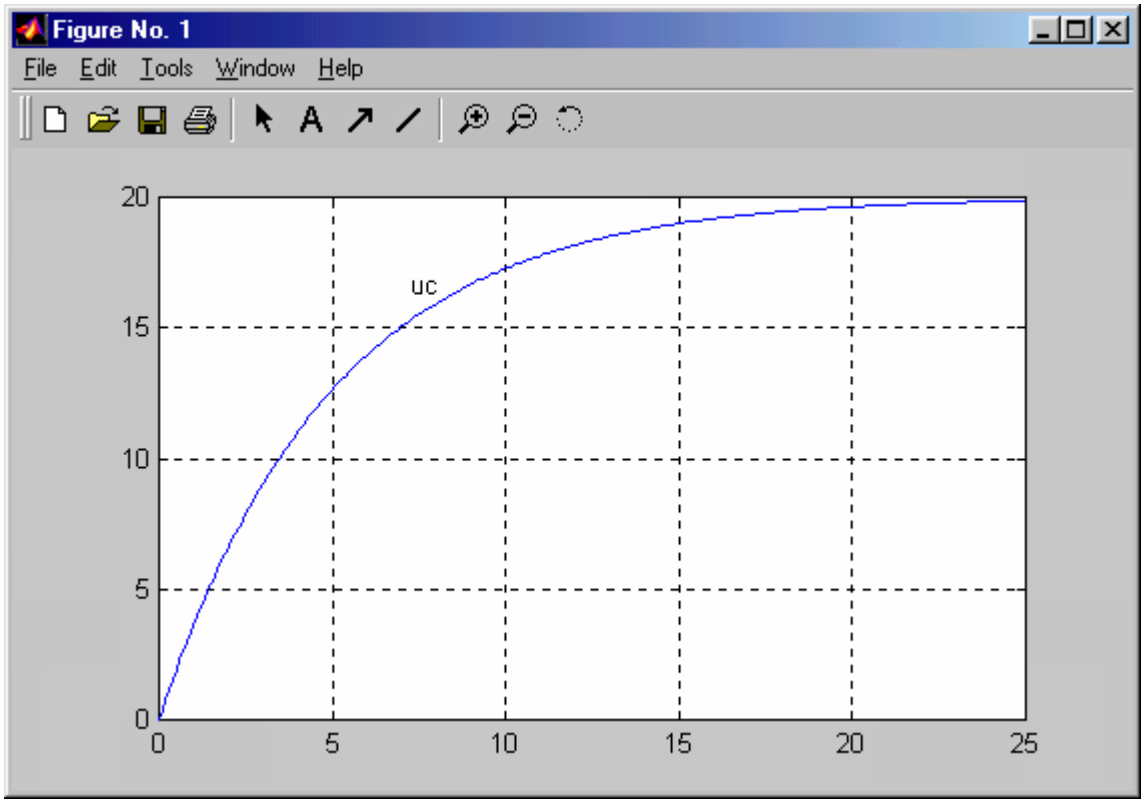
$$U_C(s) = \frac{aE}{s\left(s+a\right)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} \Rightarrow \underline{A = E} \text{ og } \underline{B = -E} \Rightarrow \underline{U_C(s) = E\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}\right)}$$

Vi invers-transformerer og får:

$$\underline{u_C(t) = E\left(1-e^{-at}\right) = E\left(1-e^{-\frac{1}{RC}}\right) = 20\left(1-e^{-0,2t}\right)}$$

Denne funksjonen kan plottes for eksempel i Matlab:

```
» t=[0:0.1:25];
»  R=500e3; C=10e-6; T=R*C;
» E=20;
» uc=E*(1-exp(-t/T));
» plot(t,uc), grid
```



figur 1

b)
Vi løser samme differensiallikning denne gangen med startverdi $u_C(0) = 30$ V Denne gangen bruker vi den klassiske løsningsmetoden:

Løs likningen :

$RC\dot{u}_C + u_C = E$ når $u_C(0) = 30$

Homogen likning :

$RC\dot{u}_{CH} + u_{CH} = 0$ Dette gir den karakteristiske likning :

$RC\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = -1/RC = -0{,}2} \Rightarrow \underline{u_{CH} = A \cdot e^{-0{,}2t}}$

Partikulær løsning :

$u_{CP} = K$ (konstant drivfunksjon) $\Rightarrow \dot{u}_{CP} = 0$ Vi setter inn i diff. likningen og får :

$RC \cdot 0 + K = E \Rightarrow K = E \Rightarrow \underline{u_{CP} = E = 20}$

Total løsning :

$u_C = u_{CH} + u_{CP} = A \cdot e^{-0,2t} + 20$

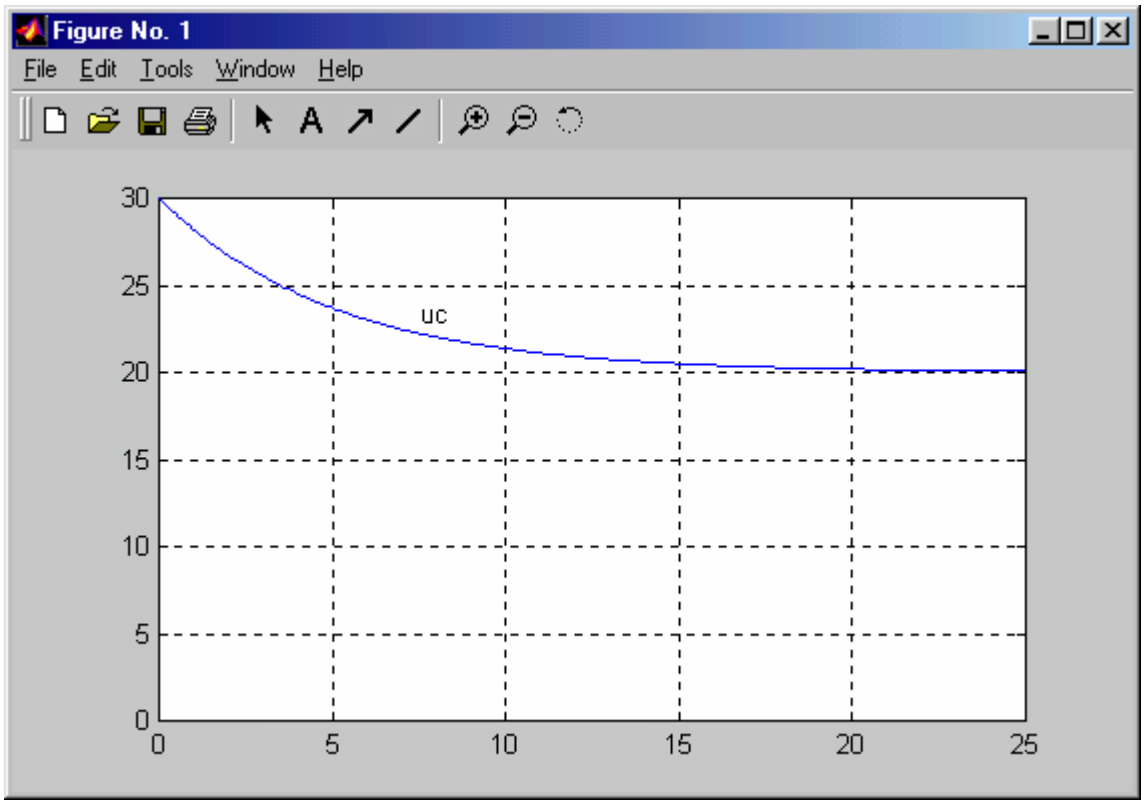
Setter inn startverdi :

$u_C(0) = A + 20 = 30 \Rightarrow \underline{A = 10}$ som gir løsningen :

$$\underline{u_C = 10 \cdot e^{-0,2t} + 20}$$

Dette kan vi også plotte med Matlab (eller på TI-89):

```
» uc=10*exp(-0.2*t)+20;
» plot(t,uc), grid
» axis([0 25 0 30]);
» gtext('uc')
```



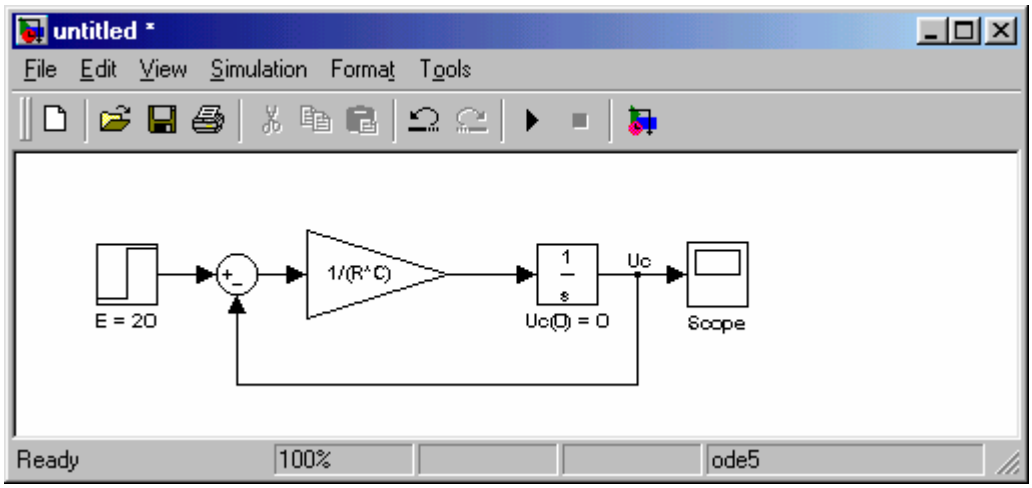
figur 2

c,d,e)

Løsning med blokkdiagram. For å sette opp blokkdiagrammet lønner det seg å sette opp likningen på *tilstandsform:*

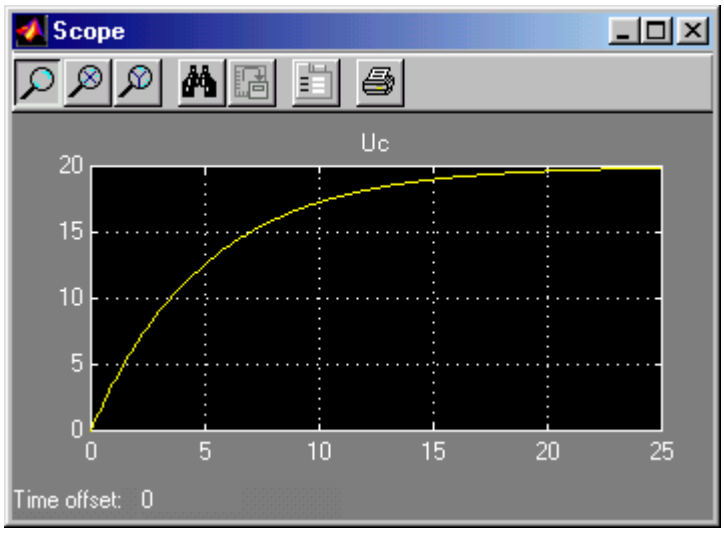
$$RC\dot{u}_C + u_C = E \Rightarrow \underline{\dot{u}_C = \frac{1}{RC}\left(-u_C + E\right)}$$

Vi kan nå sette opp følgende blokkdiagram i Simulink:



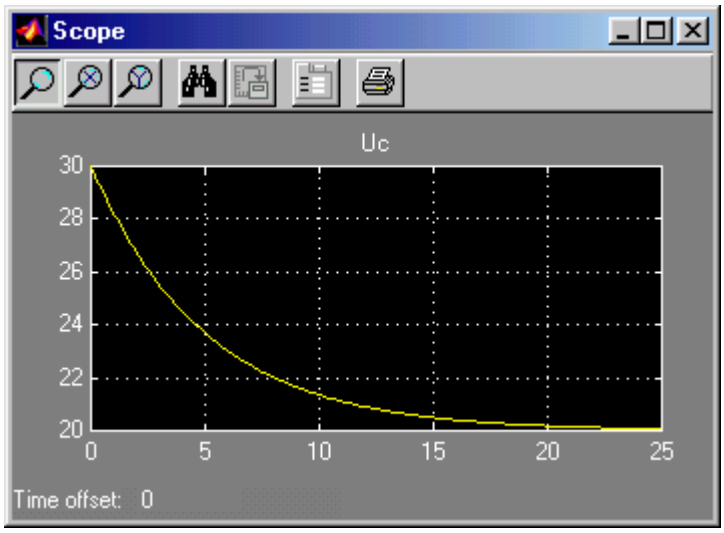
figur 3

Vi får følgende resultat:



figur 4

Vi forandrer startverdien i integratoren fra 0 til 30, simulerer på nytt og får:



figur 5

Oppgave 2

a) *Differensiallikning for kretsen.*

Spenningsbalanse rundt kretsen (etter Kirchoff) :

$$Ri + L\dot{i} + u_C = E \qquad (1)$$

For kondensatorspenningen gjelder dessuten :

$$i = C\dot{u}_C \qquad (2)$$

$$\dot{i} = C\ddot{u}_C \qquad (3)$$

Vi setter (2) og (3) inn i (1) og får :

$$\underline{RC\dot{u}_C + LC\ddot{u}_C + u_C = E} \qquad (4)$$

Differensiallikningen (4) løses så for u_C og deretter finner vi strømmen i ut fra likning (2).

b) *Løsning av differensiallikningen*

Parameterverdier: R = 100 Ω L = 1 mH C = 2 μF

Startverdier : $u_C(0) = 0 \quad i(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}_C(0) = 0 \quad \text{jfr. likn. (2)}$

Siden alle startverdier er 0 løses likningen enklest med Laplace. Først må likning (4) transformeres:

$$LCs^2U_C(s) + RCsU_C(s) + U_C(s) = \frac{E}{s}$$

Denne løses enkelt for $U_C(s)$:

$$\underline{U_C(s) = \frac{E}{s\left(LCs^2 + RCs + 1\right)} = \frac{E/LC}{s\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right)}}$$

Men vi ønsker å løse likningen for *i(t)* og transformerer derfor likning (2):

$$i(t) = C\dot{u}_C \Rightarrow I(s) = Cs \cdot U_C(s)$$

$$\underline{I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}} \qquad (5)$$

Likning (5) er den generelle løsning som kan brukes uansett parameterverdier. *Her må vi være obs. på at løsningen ikke gjelder dersom* ***startverdiene*** *forandres.*

For å inverstransformere til tidsplanet må vi først forsøke å faktorisere nevneren. Her kan vi også bruke Matlab:

```
» R=100; L=1e-3; C=2e-6;
» nevner=[L*C R*C 1]; poler=roots(nevner)

poler =
        1.0e+004 *
        -9.4721
        -0.5279
```

Dermed har vi:

$$I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{10000}{(s+94721)(s+5279)} \equiv \frac{A}{s+94721} + \frac{B}{s+5279}$$

"Håndspåleggelsesmetoden" gir :

$$A = \frac{10000}{-94721+5279} = -0{,}1118 \qquad B = \frac{10000}{-5279+94721} = 0{,}1118$$ Dette gir :

$$I(s) = 0{,}1118\left(\frac{1}{s+5279} - \frac{1}{s+94721}\right) \Rightarrow \underline{i(t) = 0{,}1118\left(e^{-5279t} - e^{-94721t}\right)}$$

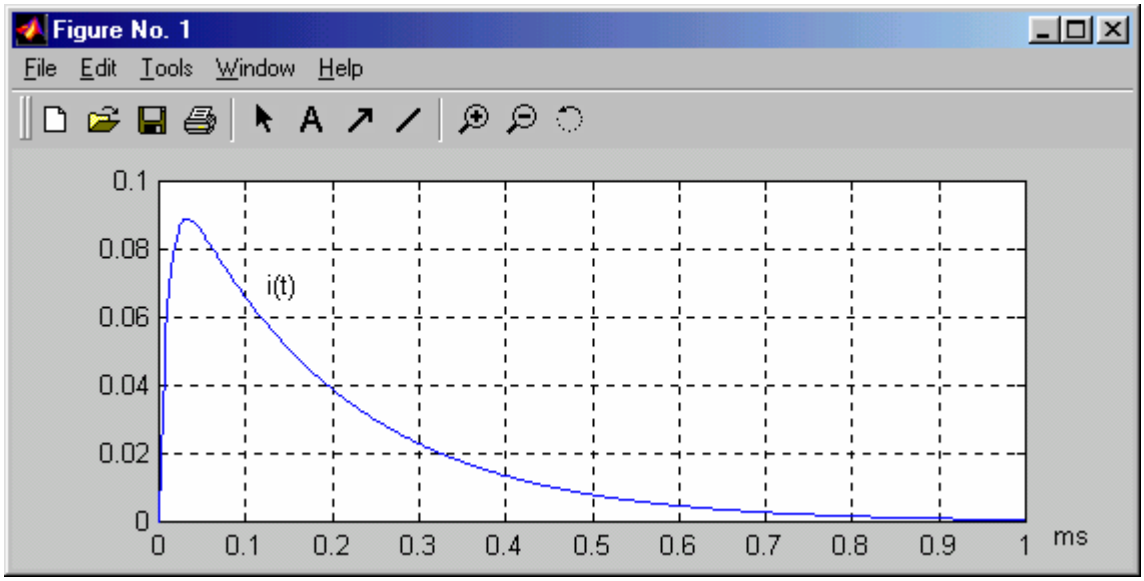
Dette svaret kan skrives mer intuitivt forståelig ved å regne ut tidskonstantene:

$T_1 = 1/5279 = 189{,}4\ \mu s \quad T_2 = 1/94721 = 10{,}56\ \mu s$

$$\underline{i(t) = 0{,}1118\left(e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}\right)}$$

Vi plotter funksjonen i Matlab:

```
» T1=-inv(poler(2)); T2=-inv(poler(1));
» t=[0:2e-6:1e-3];
» i=0.1118*(exp(-t/T1)-exp(-t/T2));
» plot(t,i), grid
» gtext('i(t)')
» gtext('ms')
```



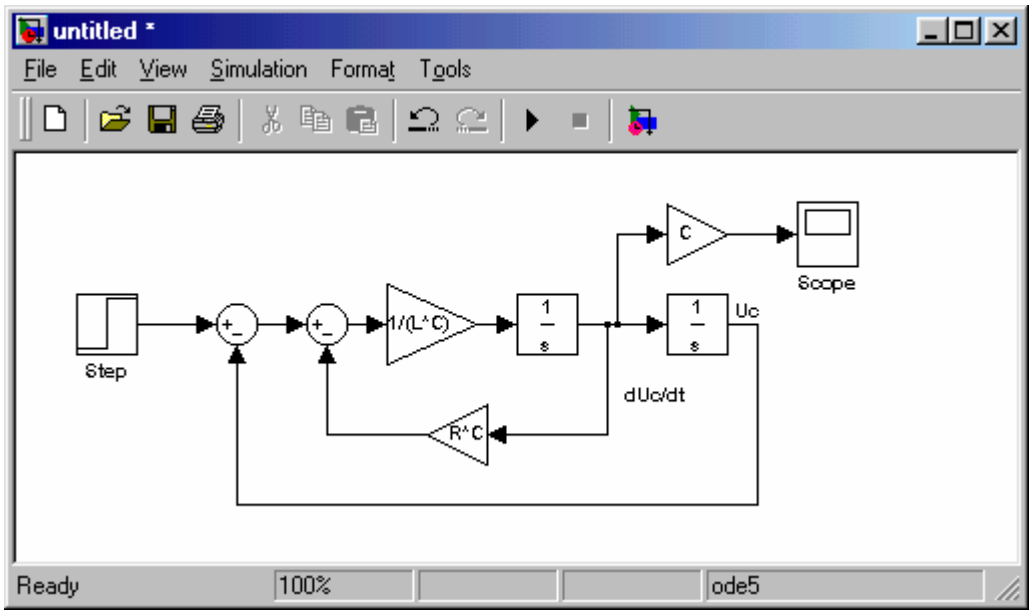
figur 6

c) *Løsning med Simulink*

For å tegne blokkdiagrammet tar vi utgangspunkt i likning (4). Vi setter den dobbeltderiverte på venstre side i likningen. Så starter vi med å tegne dobbeltintegrator og "sy sammen" diagrammet ved hjelp av likningen:

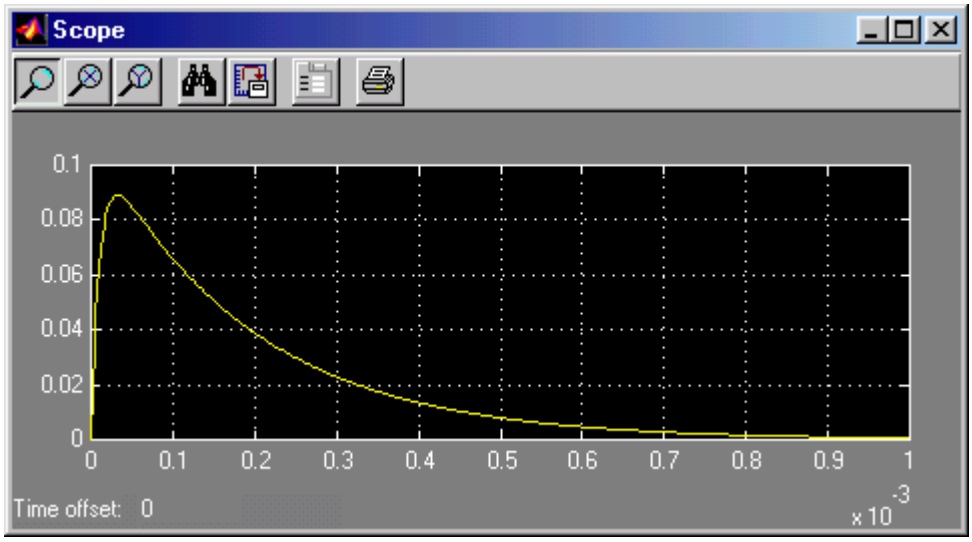
$$\ddot{u}_C = \frac{1}{LC}\left(-u_C - RC\dot{u}_C + E\right)$$

Vi får følgende diagram:



figur 7

Vi får følgende resultat:



figur 8

Vi ser at simulerings-resultatet stemmer meget bra med beregningene.

d) *Løsning av differensiallikningen med nye parametre*

R forandres fra 100 Ω til 10 Ω. Kretsparmetrene blir da:

R = 10 Ω *L* = 1 mH *C* = 2 μF *E* = 10 V

Løsningen på differensiallikningen (5) (på tranformert form) gjelder fortsatt:

$$\underline{I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}} \qquad (5)$$

Vi benytter igjen Matlab (eller kalkulator) til å finne polene for evt. å faktorisere nevneren:

```
>> format compact
>> E=10; R=10; L=1e-3; C=2e-6;
>> nevner=[1 R/L 1/(L*C)];
>> poler=roots(nevner)
        poler =
         1.0e+004 *
         -0.5000 + 2.1794i
         -0.5000 - 2.1794i
```

Vi får altså kompleks-konjugerte poler:

$$s_{1,2} = -5000 \pm j \cdot 21794$$

Realdelen α gir oss dempningen på signalet. Tidskonstanten er gitt ved:

$$\underline{T = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{1}{5000} = 0,2 \text{ ms}}$$

Imaginærdelen β gir oss svingefrekvensen. Periodetiden er gitt ved:

$$\underline{T_P = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{6,2832}{21794} \approx 0,2883 \text{ ms}}$$

Likning (5) kan nå skrives:

$$I(s) = \frac{E/L}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \equiv \frac{10000}{(s+\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{10000}{(s+5000)^2 + 21794^2} \Rightarrow$$

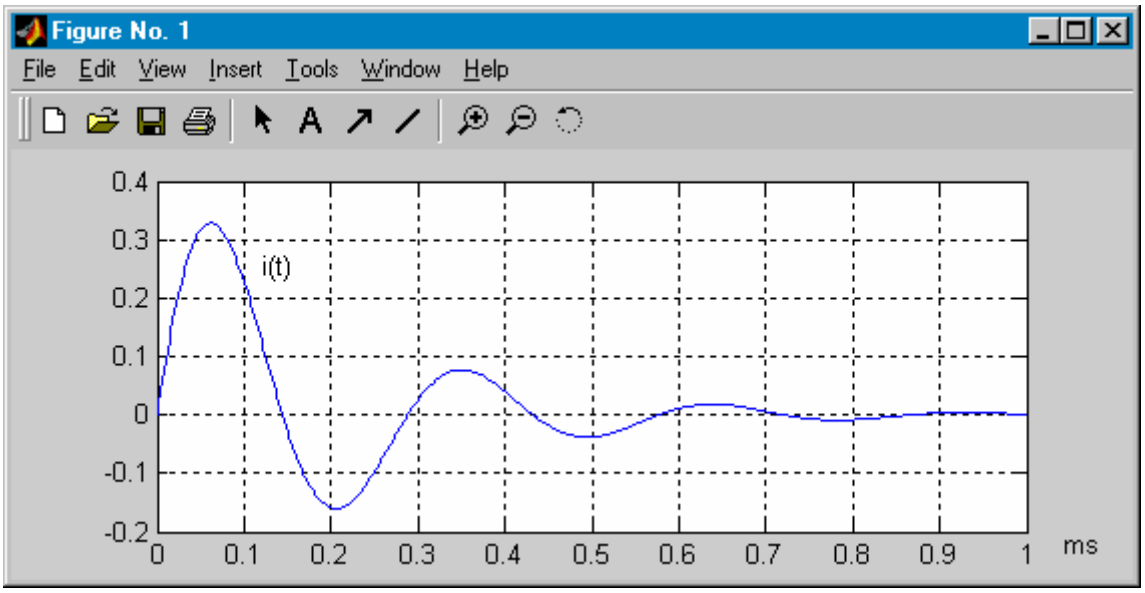
$$I(s) = \frac{10000}{21794} \cdot \frac{21794}{(s+5000)^2 + 21794^2} \approx 0,4588 \cdot \frac{21794}{(s+5000)^2 + 21794^2}$$

Vi får da:

$$\underline{i(t) = 0,4588 \cdot e^{-t/T} \cdot \sin(\beta t)}$$

Denne funksjonen kan enkelt plottes på TI-89 eller i Matlab:

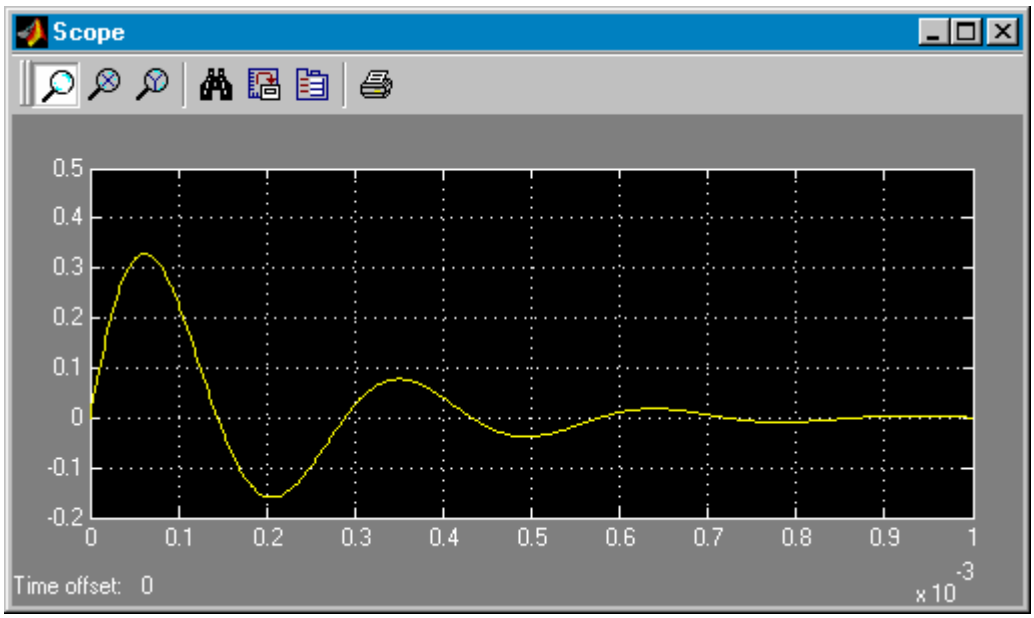
```
>> a=-5000; b=21794; K=0.4588;
>> t=[0:2e-6:1e-3];
>> i=K*exp(a*t).*sin(b*t);
>> plot(t,i), grid
>> axis([0 1e-3 -0.2 0.4])
>> gtext('i(t)')
>> gtext('ms')
```



figur 9

e) *Simulering med Simulink*

Her bruker vi samme simuleringsdiagram som sist og forandrer bare parameteren *R*. Vi får :



figur 10

Beregningene stemmer tydeligvis godt.

f) *Simulering i Matlab med tilstandsrom-modell.*

For å sette opp en tilstandsrom-modell kan vi ta utgangspunkt i den opprinnelige differensiallikningen:

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = E \quad \text{og} \quad i = C\dot{u}_C$$

Siden dette er en 2.ordens diff.likning får vi to tilstander.

Vi velger:

$x_1 = u_C \quad x_2 = \dot{u}_C$ dessuten pådrag $u = E$ og måling $y = i$

Vi får da følgende tilstandslikninger:

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u$$

samt målelikning:

$$y = Cx_2$$

Disse likningene kan skrives på vektor-matrise form:

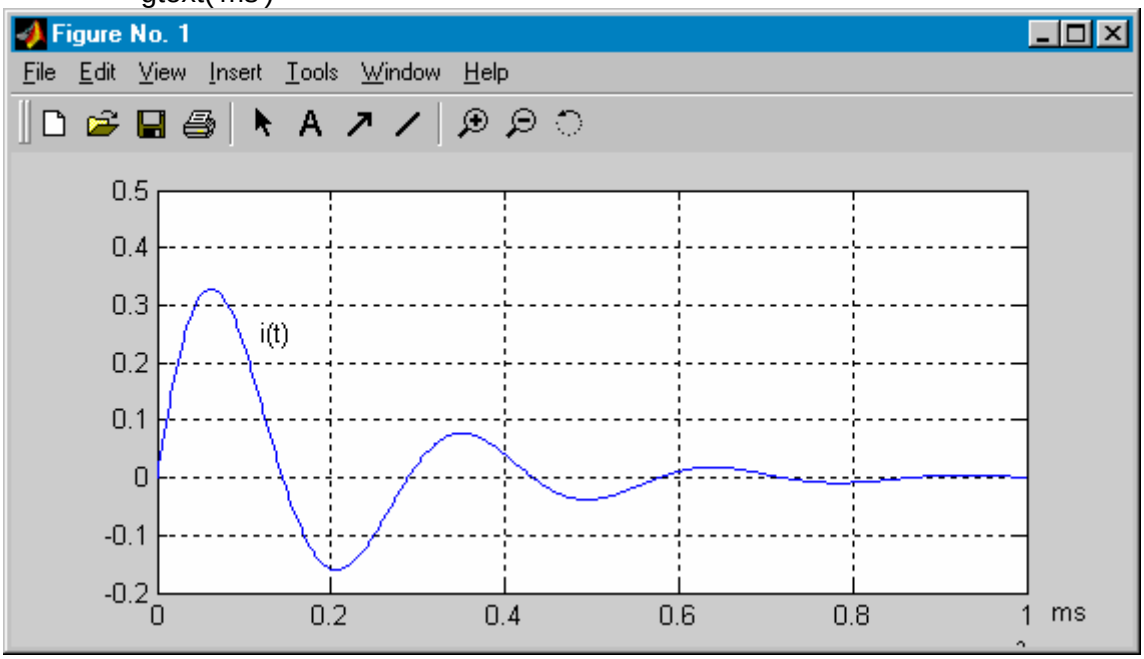
$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \qquad y = D\underline{x} + Eu \qquad (6)$$

hvor:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & C \end{pmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

Dette er alt vi trenger for å simulere systemet i Matlab:

```
>> A=[0 1;-1/(L*C) -R/L];  B=[0;1/(L*C)];  D=[0 C]; E=0;
>> krets=ss(A,B,D,E);
>> i=10*step(krets,t);
>> plot(t,i), grid
>> gtext('i(t)')
>> gtext('ms')
```



Vi ser igjen at resultatet stemmer. Vi kan oppsummere ved å si at vi har brukt 3 forskjellige metoder:

1) Løsning av diff.likning og plotting av resultat. (den mest arbeidskrevende metoden)
2) Simulering med Simulink.
3) Simulering med Matlab (med ss- eller tf-modell) (den minst arbidskrevende metoden)

Metode 1 kan allikevel by på fordeler, spesielt i en læringsfase som dere er i, da det er denne metoden som gir størst innsikter, pluss at den danner grunnlaget for programmer som Matlab og Simulink.

Metode 2 er absolutt den mest slagkraftige metoden hvis man skal jobbe over tid med et større og komplisert system.

Metode 3 er rask og grei for små systemer med lineær dynamikk. Denne oppgaven var for eksempel midt i blinken for en Matlab-simulering. Men for større ulineære systemer kan det fort bli mer kronglete enn man setter pris på. Det er heller ikke så lett å oppdage modellfeil i Matlab som det er i Simulink.