



HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og datateknikk

GO326A Matematikk 2F

Øving 4 , Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: *Laplace transformasjonen*

Oppgaver fra læreboka:

Avsnitt 21.4 (s. 605 - 606) Oppg. 1:

a) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\{3t^2 - 4\} = \frac{6}{s^3} - \frac{4}{s} = \frac{6 - 4s^2}{s^3}$$

b) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\{2\sin(4t) + 11 - t\} = \frac{8}{s^2 + 16} + \frac{11}{s} - \frac{1}{s^2}$$

c) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\{2 - t^2 + 2t^4\} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{2 \cdot 4!}{s^5} = \frac{2}{s} - \frac{2}{s^3} + \frac{48}{s^5}$$

d) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\{3e^{2t} + 4\sin t\} = \frac{3}{s - 2} + \frac{4}{s^2 + 1}$$

e) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}\sin 3t - 4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right\} = \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{4s}{s^2 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{16s}{4s^2 + 1}$$

f) Her kan vi bruke dempningsregelen ("first shift theorem")

$$f(t) = 3t^4 e^{5t} + t = e^{5t} \cdot g(t) + t$$

$$\text{Hvor: } g(t) = 3t^4$$

$$\text{Dempningsregelen: } \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(s+a)$$

$$\text{Her har vi: } a = -5 \text{ og } G(s) = \frac{3 \cdot 4!}{s^5} = \frac{72}{s^5}$$

Dette gir:

$$F(s) = \mathcal{L}\{3t^4 e^{5t} + t\} = \frac{72}{(s-5)^5} + \frac{1}{s^2}$$

g) Fra tabell:

$$F(s) = \mathcal{L}\{\sinh 2t + 3 \cosh 2t\} = \frac{2}{s^2 - 4} + \frac{3s}{s^2 - 4} = \frac{2 + 3s}{s^2 - 4}$$

h) Igjen får vi bruk for dempningsregelen:

$$f(t) = e^{-t} \sin 3t + 4e^{-t} \cos 3t = e^{-t} (\sin 3t + 4 \cos 3t) \equiv e^{-t} \cdot g(t)$$

$$G(s) = \mathcal{L}\{\sin 3t + 4 \cos 3t\} = \frac{3}{s^2 + 9} + \frac{4s}{s^2 + 9} = \frac{3 + 4s}{s^2 + 9}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{3 + 4(s+1)}{(s+1)^2 + 9} = \frac{4s + 7}{s^2 + 2s + 10}$$

Avsnitt 21.4 (s. 605 - 606) Oppg. 2:

$$\text{Gitt: } F(s) = \frac{3s^2 - 1}{s^2 + s + 1}$$

a) Finn Laplacetransformasjonen til $g(t) = e^{-t} f(t)$

$$\text{Her bruker vi dempningsregelen: } \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$$

Her har vi $a = 1$):

$$G(s) = F(s+1) = \frac{3(s+1)^2 - 1}{(s+1)^2 + (s+1) + 1} = \frac{3s^2 + 6s + 2}{s^2 + 3s + 3}$$

b) Finn Laplacetransformasjonen til $g(t) = e^{3t} f(t)$): $a = -3$

$$G(s) = F(s+1) = \frac{3(s-3)^2 - 1}{(s-3)^2 + (s-3) + 1} = \frac{3s^2 - 18s + 26}{s^2 - 5s + 7}$$

c) Finn Laplacetransformasjonen til $g(t) = e^{-t/2} f(t)$): $a = 1/2$

$$G(s) = F\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) + 1} \cdot \frac{4}{4} = \frac{3(2s+1)^2 - 4}{(2s+1)^2 + (4s+2) + 4}$$

$$G(s) = \frac{12s^2 + 12s - 1}{4s^2 + 8s + 7}$$

Avsnitt 21.5 (s. 608) Opppg. 1:

For disse oppgavene gjelder: $y(0) = 3$ $y'(0) = 1$

Når differensiallikninger skal transformeres får vi selvsagt bruk for derivasjonsreglene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= Y(s) \\ \mathcal{L}\{\dot{y}(t)\} &= sY(s) - y(0) \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\} &= s^2Y(s) - s \cdot y(0) - \dot{y}(0) \\ \mathcal{L}\{y^{(3)}(t)\} &= s^3Y(s) - s^2y(0) - s \cdot \dot{y}(0) - \ddot{y}(0) \\ &\text{osv...} \end{aligned}$$

e)

$$\mathcal{L}\{3\ddot{y} - \dot{y} + 2y\} = 3(s^2Y(s) - 3s - 1) - (sY(s) - 3) + 2Y(s) = \underline{(3s^2 - s + 2)Y(s) - 9s}$$

f)

$$\mathcal{L}\{-4\ddot{y} + 5\dot{y} - 3y\} = -4(s^2Y(s) - 3s - 1) + 5(sY(s) - 3) - 3Y(s) = \underline{(-4s^2 + 5s - 3)Y(s) + 12s - 11}$$

g)

$$\mathcal{L}\{3\ddot{y} + 6\dot{y} + 8y\} = 3(s^2Y(s) - 3s - 1) + 6(sY(s) - 3) + 8Y(s) = \underline{(3s^2 + 6s + 8)Y(s) - 9s - 21}$$

h)

$$\mathcal{L}\{4\ddot{y} - 8\dot{y} + 6y\} = 4(s^2Y(s) - 3s - 1) - 8(sY(s) - 3) + 6Y(s) = \underline{(4s^2 - 8s + 6)Y(s) - 12s + 20}$$

Legg for øvrig merke til at *det karakteristiske polynomet* i parentesene foran $Y(s)$ alltid svarer til den oppgitte differensiallikning. Det er denne som beskriver *systemet*. De øvrige ledd bestemmes av startbetingelsene, altså av *signalene i systemet*. Disse vil variere fra gang til gang. Derfor kan vi se bort fra startbetingelsene når vi skal finne transferfunksjonen som er en systembeskrivelse gyldig for alle signaler i systemet.

Et annet eksempel på systembeskrivelse som dere kjenner fra før er impedansen i en elektrisk krets. Denne er alltid den samme uansett signaler i kretsen.

Avsnitt 21.6 (s. 611) Oppg. 1:

Disse transformasjonene tas direkte fra tabell. Her henvises til fasiten på side 611.

Avsnitt 21.6 (s. 611) Oppg. 2:

$$\text{g)} \quad \underline{f(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{s+4}{(s+4)^2 + 1} \right\} = \underline{e^{-4t} \cos t} \quad (\text{dempningsregelen})$$

$$\text{h)} \quad \underline{f(t)} = L^{-1} \left\{ \frac{5}{(s+4)^2 + 1} \right\} = \underline{5e^{-4t} \sin t} \quad (\text{dempningsregelen})$$

i) Her må vi trikse litt mer for å få samsvar med tabellene:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{6s+17}{(s+4)^2 + 1} \right\}$$

$$F(s) = \frac{6s+17}{(s+4)^2 + 1} = \frac{6s+24-7}{(s+4)^2 + 1} = \frac{6(s+4)}{(s+4)^2 + 1} - \frac{7}{(s+4)^2 + 1}$$

Nå kan vi bruke tabellen / dempningsregelen:

$$\underline{f(t) = 6e^{-4t} \cos t - 7e^{-4t} \sin t}$$

j) Her må vi tikse enda litt mer. Dette er den typiske situasjon når vi kommer bort i komplekse poler. Vi prøver først å sette nevneren på formen $(s+a)^2 + b^2$:

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + 2s + 7} \right\}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 7} = \frac{s}{(s+1)^2 + 6} = \frac{s+1-1}{(s+1)^2 + (\sqrt{6})^2}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{6})^2} - \frac{1}{(s+1)^2 + (\sqrt{6})^2}$$

$$F(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + (\sqrt{6})^2} - \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{(s+1)^2 + (\sqrt{6})^2}$$

Nå kan vi bruke tabell / dempningsregel:

$$\underline{f(t) = e^{-t} \cos(\sqrt{6} \cdot t) - \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-t} \sin(\sqrt{6} \cdot t)}$$