



Øving 5 , Løsningsforslag

d:\backup\fag\ma2f_03\ovinger\oving_08\ma2f_l08_03v1.doc

Høsten 2004

Emne: *Laplace transformasjon / invers Laplace transformasjon*

Oppgave 1A

Fra tabell:

a) $f(t) = 4 \Rightarrow F(s) = \frac{4}{s}$

b) $f(t) = 2t \Rightarrow F(s) = \frac{2}{s^2}$

c) $f(t) = 3e^{-5t} \Rightarrow F(s) = \frac{3}{s+5}$

d) $f(t) = 2u(t-1) - 4u(t-3) \Rightarrow F(s) = \frac{2}{s} \cdot e^{-s} - \frac{4}{s} \cdot e^{-3s}$

Oppgave 2A

a)

$$f(t) = 3\sin(2\pi t)$$

Denne kan vi transformere direkte fra tabell:

$$F(s) = 3 \cdot \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} = \frac{6\pi}{s^2 + 4\pi^2} \approx \frac{18,85}{s^2 + 39,48}$$

b)

$$f(t) = 4t \cos(5t)$$

Også denne finner vi i tabellen på side 600 i læreboka:

$$F(s) = 4 \cdot \frac{s^2 - 5^2}{(s^2 + 5^2)^2} = \frac{4(s^2 - 25)}{(s^2 + 25)^2}$$

c)

$$f(t) = 2t^2 e^{-t}$$

Her bruker vi dempningsregelen:

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot g(t)\} = G(s+a)$$

$$\text{Her har vi: } g(t) = 2t^2 \Rightarrow G(s) = \frac{2 \cdot 2}{s^3} = \frac{4}{s^3}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{4}{(s+1)^3}$$

d)

$$f(t) = 4t \cdot e^{2t} \sin(\pi t)$$

Også her kan vi bruke dempningsregelen: $g(t) = 4t \cdot \sin(\pi t)$

$$\text{Fra tabell: } G(s) = 4 \cdot \frac{2\pi s}{(s^2 + \pi^2)^2} = \frac{8\pi s}{(s^2 + \pi^2)^2}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{8\pi(s-2)}{[(s-2)^2 + \pi^2]^2}$$

e)

$f(t) = 2 \cos^2(4t)$ Fra trigonometrien har vi:

$$f(t) = 1 + \cos(8t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 8^2} = \frac{2s^2 + 8^2}{s(s^2 + 8^2)} = \frac{2(s^2 + 32)}{s(s^2 + 64)}$$

Oppgave 3A

a)

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s+1} + \frac{5s}{s^2+2^2} \Rightarrow f(t) = t + 3e^{-t} + 5 \cos(2t)$$

b)

$$F(s) = \frac{4}{s(1+2s)} = \frac{2}{s(s+0,5)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{B}{s+0,5}$$

"Håndspåleggelse":

$$A = \lim_{s \rightarrow 0} (sF(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{2}{s+0,5} \right) = 4$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -0,5} ((s+0,5)F(s)) = \lim_{s \rightarrow -0,5} \left(\frac{2}{s} \right) = -4$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+0,5} = 4 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0,5} \right)$$

$$\Rightarrow f(t) = 4(1 - e^{-0,5t}) = 4(1 - e^{-t/2})$$

c)

$$F(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}$$

Her må vi først se om vi kan faktorisere nevneren:

$$s^2 + s + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{1-4}) = -\frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{3} \equiv \alpha \pm j\beta$$

Dermed kan funksjonen skrives som:

$$F(s) = \frac{10}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \frac{10}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{(s + \frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} \approx 11,55 \cdot \frac{0,866}{(s + \frac{1}{2})^2 + (0,866)^2}$$

Ved hjelp av tabell og dempningssatsen får vi nå:

$$\underline{f(t) \approx 11,55 \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(0,866t)}$$

d)

$$F(s) = \frac{s^2 - 2}{s^3(s+1)} = \frac{1}{s(s+1)} - \frac{2}{s^3(s+1)} \equiv F_1(s) - F_2(s)$$

$$F_1(s) = \frac{1}{s(s+1)} \Rightarrow f_1(t) = 1 - e^{-t} \text{ (fra tabell)}$$

$$F_2(s) = \frac{2}{s^2} F_1(s) \Rightarrow f_2(t) = 2 \int_0^t \int_0^t f_1(t) dt dt = 2 \int_0^t \int_0^t (1 - e^{-t}) dt dt$$

$$f_2(t) = 2 \int_0^t \int_0^t [t + e^{-t}] dt = 2 \int_0^t (t + e^{-t} - 1) dt = 2 \int_0^t [\frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - t] dt = 2(\frac{1}{2}t^2 - e^{-t} - t + 1)$$

$$\underline{f_2(t) = t^2 + 2(1 - t - e^{-t})} \text{ Dermed får vi:}$$

$$\underline{\underline{f(t) = f_1(t) - f_2(t) = 1 - e^{-t} - t^2 - 2 + 2t + 2e^{-t} = 2t - t^2 - 1 + e^{-t}}}$$

e)

$$F(s) = \frac{5}{s(s^2 + 2s + 2)} \equiv \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 2} = \frac{A(s^2 + 2s + 2) + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$F(s) = \frac{s^2(A+B) + s(2A+C) + 2A}{s(s^2 + 2s + 2)} \quad \text{Dette gir:}$$

$$2A = 5 \Rightarrow \underline{A = 2,5}$$

$$A + B = 0 \Rightarrow \underline{B = -2,5}$$

$$2A + C = 0 \Rightarrow \underline{C = -5}$$

$$\therefore F(s) = \frac{2,5}{s} - \frac{2,5s + 5}{s^2 + 2s + 2} \quad \text{2.grads nevneren har komplekse poler. Vi kan sette:}$$

$$F(s) = \frac{2,5}{s} - \frac{2,5s + 5}{(s^2 + 2s + 1) + 1} = \frac{2,5}{s} - \frac{2,5s + 5}{(s+1)^2 + 1} = \frac{2,5}{s} - \frac{2,5s + 2,5 + 2,5}{(s+1)^2 + 1}$$

$$F(s) = \frac{2,5}{s} - \frac{2,5(s+1)+2,5}{(s+1)^2+1} = 2,5 \left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1)+1}{(s+1)^2+1} \right)$$

$$F(s) = 2,5 \left(\frac{1}{s} - \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{f(t) = 2,5(1 - e^{-t} \cos(t) - e^{-t} \sin(t))}$$

Oppgave 4A

a)

$$Z_R = R \quad Z_L = sL \quad Z_C = \frac{1}{sC}$$

$$\text{Serieimpedansen } \underline{Z} = Z_R + Z_L + Z_C = R + sL + \frac{1}{sC}$$

b)

Strømmen i kretsen er gitt ved:

$$\underline{I(s)} = \frac{U(s)}{Z(s)} = \frac{U_0/s}{R + sL + 1/sC} = \frac{U_0 C}{1 + RCs + LCs^2}$$

Kretsens overføringsfunksjon (transferfunksjon) blir:

$$h(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{R + sL + 1/sC} = \frac{sC}{1 + RCs + LCs^2}$$

c)

Kretsparametrene er: $U_0 = 10\text{V}$ $R = 10\Omega$ $L = 1\text{mH}$ $C = 2\mu\text{F}$

For å finne kretsstrømmen setter vi inn disse verdiene i $I(s)$ og inverstransformerer:

$$I(s) = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1 + 10 \cdot 2 \cdot 10^{-6}s + 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-6}s^2} = \frac{20}{10^6 + 20s + 2 \cdot 10^{-3}s^2}$$

$$I(s) = \frac{10000}{s^2 + 10000s + 5 \cdot 10^8} \equiv \frac{10000}{s^2 + 10000s + 5000^2 - 5000^2 + 5 \cdot 10^8}$$

$$\underline{I(s)} = \frac{10000}{(s+5000)^2 + 475 \cdot 10^6} = \frac{10000}{(s+5000)^2 + 21794^2} = \frac{10000}{21794} \cdot \frac{21794}{(s+5000)^2 + 21794^2}$$

Dermed har vi:

$$\underline{i(t) = 0,459 \cdot e^{-5000t} \sin(21794t) = 0,459 \cdot e^{-t/T} \sin(2\pi f \cdot t)}$$

Hvor $T = 0,2\text{ms}$ og $f \approx 3470\text{ Hz}$

Oppgave 1B Bruk av Matlab-kommando **laplace** til å løse oppg. 1A

a)

```
>> syms f F t s
>> f=sym(4);
>> F=laplace(f)
F =
4/s
```

b)

```
>> f=2*t;
>> F=laplace(f)
F =
2/s^2
```

c)

```
>> f=3*exp(-5*t);
>> F=laplace(f)
F =
3/(s+5)
```

d)

```
>> f=sym('2*Heaviside(t-1)-4*Heaviside(t-3)');
>> F=laplace(f)
F =
2*exp(-s)/s-4*exp(-3*s)/s
>> pretty(F)
```

$$\frac{2 \exp(-s)}{s} - \frac{4 \exp(-3 s)}{s}$$

Oppgave 2B Bruk av Matlab-kommando **laplace** til å løse oppg. 2A

a)

```
>> f=3*sin(2*pi*t);
>> F=laplace(f)
F =
6*pi/(s^2+4*pi^2)
```

b)

```
>> f=4*t*cos(5*t);
>> F=laplace(f)
F =
4/(s^2+25)*cos(2*atan(5/s))
>> m=expand(F)
m =
8/(s^2+25)/(1+25/s^2)-4/(s^2+25)
>> pretty(m)
```

$$\frac{8}{(s^2 + 25) \left(1 + \frac{25}{s^2} \right)} - \frac{4}{s^2 + 25}$$

Resultatet ble ikke særlig “pretty” i Word.

c)

```
>> f=2*(t^2)*exp(-t);
>> F=laplace(f)
F =
4/(s+1)^3
```

d)

```
>> f=4*t*exp(2*t)*sin(pi*t);
>> F=laplace(f)
F =
8*pi/((s-2)^2+pi^2)^2*(s-2)
>> pretty(F)
```

$$8 \frac{\pi (s - 2)}{((s - 2)^2 + \pi^2)^2}$$

e)

```
>> f=2*(cos(4*t))^2;
>> F=laplace(f)
F =
64/s/(s^2+64)*(1+1/32*s^2)
>> pretty(F)
```

$$64 \frac{1 + \frac{1}{32} s^2}{s (s^2 + 64)}$$

Oppgave 3B Bruk av Matlab-kommando **ilaplace** til å løse oppg. 3A

a)

```
>> F=1/s^2 + 3/(s+1) + 5*s/(s^2 + 4);
>> f=ilaplace(F)
f =
t+3*exp(-t)+5*cos(4^(1/2)*t)
```

b)

```
>> F=4/(s*(1+2*s));
>> f=ilaplace(F)
f =
4-4*exp(-1/2*t)
>> pretty(f)
```

$$4 - 4 \exp(-1/2 t)$$

c)

```
>> F=10/(s^2 + s + 1);
>> f=ilaplace(F)
f =
-10/3*(-3)^(1/2)*(exp((-1/2+1/2*(-3)^(1/2))*t)-exp((-1/2-1/2*(-3)^(1/2))*t))
>> f=simple(f)
f =
-10/3*i*3^(1/2)*(exp(1/2*(-1+i*3^(1/2))*t)-exp(-1/2*(1+i*3^(1/2))*t))
>> pretty(f)
```

$$- \frac{10}{3} i \sqrt{3} \left(\exp\left(\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})t\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})t\right) \right)$$

Svaret er riktig men med komplekse eksponenter som programmet **Maple**, uvisst av hvilken grunn, ikke gjør om til trigonometriske funksjoner.

d)

```
>> F=(s^2 - 2)/((s^3)*(s+1));
>> f=ilaplace(F)
f =
-t^2+2*t-1+exp(-t)
```

e)

```
>> F=(1/s)*(5/(s^2 + 2*s + 2));
>> f=ilaplace(F)
f =
5/2-5/4*(-4)^(1/2)*(1/(-1+1/2*(-4)^(1/2))*exp((-1+1/2*(-4)^(1/2))*t)-1/(-1-1/2*(-4)^(1/2))*exp((-1-1/2*(-4)^(1/2))*t))
>> f=simple(f);
>> pretty(f)
```

$$\left(-\frac{5}{4} - \frac{5}{4}i\right) (-1 - i \exp((-1 + i)t) + \exp((-1 - i)t) + i)$$

Igjen får vi et uoversiktlig svar pga. manglende omregning fra komplekse eksponensialfunksjoner til trigonometriske funksjoner.

Oppgave 4B Simulering av elektrisk krets i Matlab med kommandoen **step**

Transferfunksjonen for kretsen var:

$$h(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{sC}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Parameter verdiene var: $R = 10\Omega$ $L = 1\text{mH}$ $C = 2\mu\text{F}$

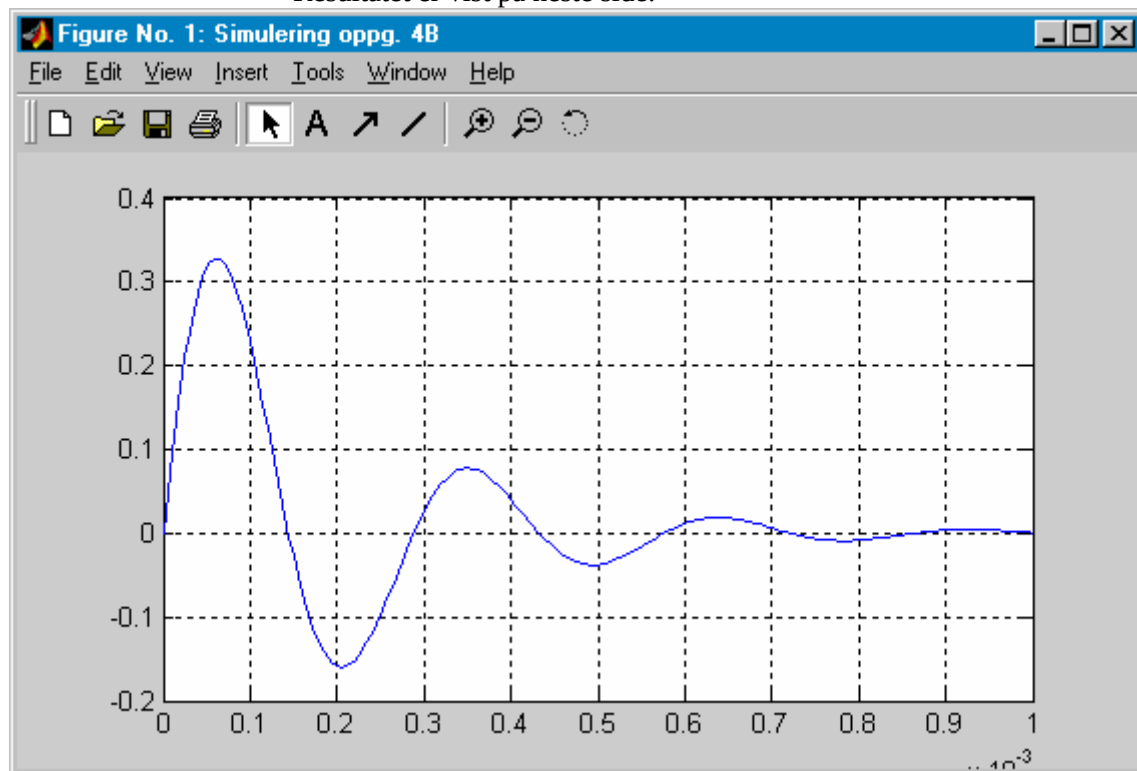
Batteri spenning: $U_0 = 10\text{V}$

Vi skriver da i Matlab:

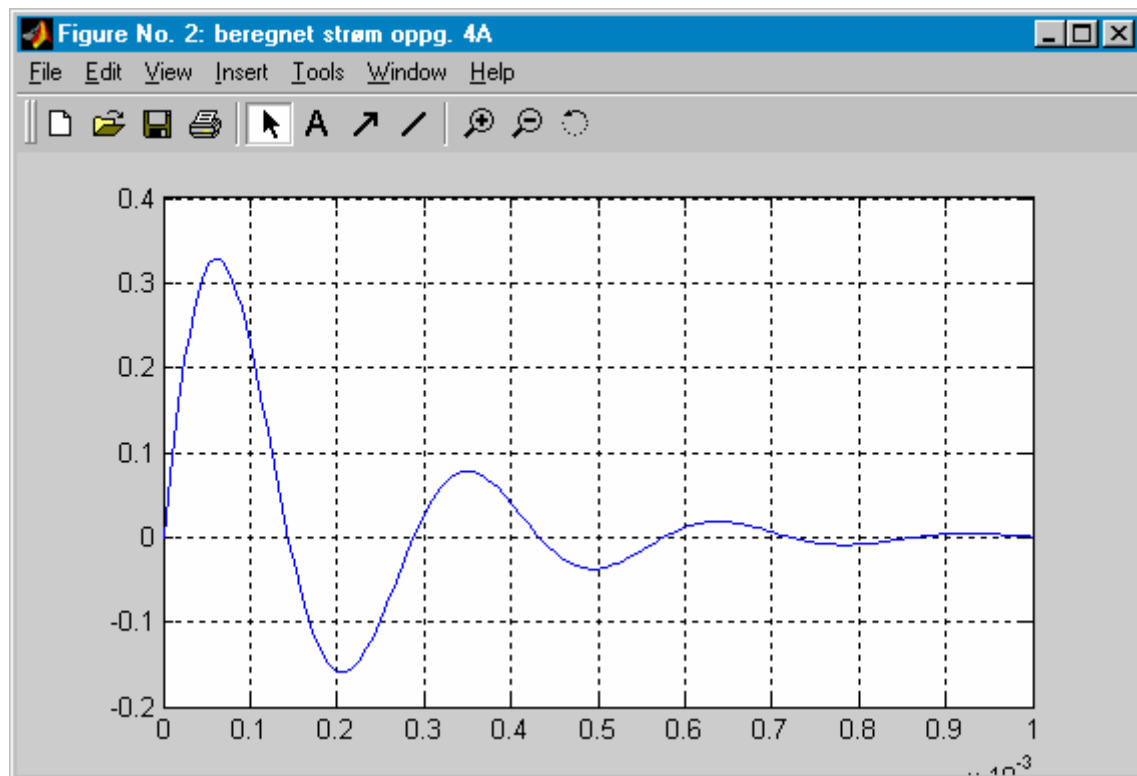
```
>> U0=10; R=10; L=1e-3; C=2e-6;
>> t=[0:5e-6:1e-3];
>> teller=[C 0]; nevner=[L*C R*C 1];
>> sys=tf(teller,nevner);
>> I=U0*step(sys,t);
```

```
>> plot(t,I), grid  
>> axis([0 1e-3 -0.2 0.4])
```

Resultatet er vist på neste side:



Til sammenlikning kan vi plote beregnet $i(t)$ fra oppg. 4A. Den formelen som vi regna ut skriver vi ganske enkelt inn i Matlab og plotter på vanlig måte. Resultatet ser vi nedenfor:



Kommentarer overflødige.