Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 6 , Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: Blokkskjema-regning / poler og respons

Oppgave 1 *Dynamisk modell*

Motoren beskrives av følgende differensial-likninger:
Ankerkretsen:

$$U - e = Ri + L\dot{i} \tag{1}$$

Her er:
U - påtrykt ankerspenning
e - motindusert spenning
i - strømmen i ankerkretsen

Vi har følgende sammenheng mellom motidusert spenning og motorhastighet:

$$e = k_E\Omega \tag{2}$$

Hvor Ω er motorens turtall [rad/sek]. Dermed får vi:

$U - k_E\Omega = Ri + L\dot{i}$ som kan skrives:

$$\dot{i} = \frac{1}{L}\left(-Ri - k_E\Omega + U\right) \tag{3}$$

Motorakselen:

$$T_m - T_L - d\cdot\Omega = J\dot{\Omega} \tag{4}$$

Her er:
T_m - motormoment
T_L - belastningsmoment
d - viskøs friksjonskoefissient (tilnærmet null)
J - samlet treghetsmoment: $J = J_m + J_L$

Følgende sammenheng mellom ankerstrøm og motormoment gjelder:

$$T_m = k_T i \tag{5}$$

Dermed får vi:

$$k_T i - T_L = J\dot{\Omega} \Rightarrow \underline{\dot{\Omega} = \frac{1}{J}(k_T i - T_L)} \qquad (6)$$

Motormodellen utgjøre da av likning (3) og (6).

Parameterberegninger:

$$\underline{J} = J_m + J_L = 0{,}115 + 0{,}05 \left[\text{kgm}^2\right] = \underline{0{,}165\left[\text{kgm}^2\right]}$$

$$k_T I_N = T_N \Rightarrow \underline{k_T} = \frac{T_N}{I_N} = \frac{42{,}5\left[\text{Nm}\right]}{12{,}5\left[\text{A}\right]} = \underline{3{,}4\left[{}^{\text{Nm}}\!/_{\text{A}}\right]}$$

$$U_N - k_E \Omega_N = R I_N$$

$$\Rightarrow \underline{k_E} = \frac{U_N - R I_N}{\Omega_N} = \frac{300 - 2{,}06 \cdot 12{,}5}{76{,}5}\left[{}^{\text{Vs}}\!/_{\text{rad}}\right] \simeq \underline{3{,}59\left[{}^{\text{Nm}}\!/_{\text{A}}\right]}$$

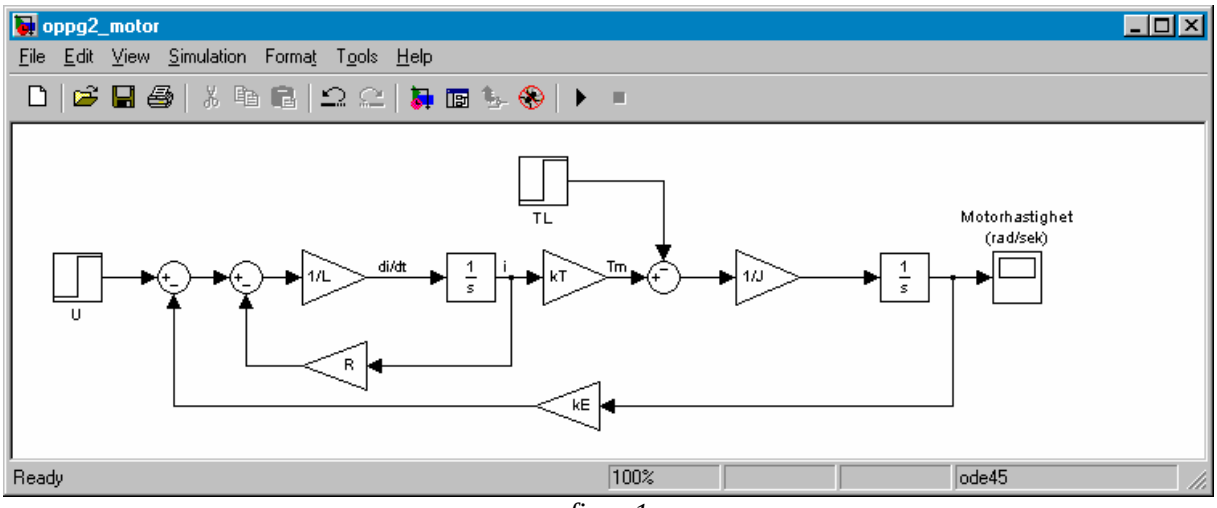
Sammenstilling av k_E og k_T :

Inngangseffekt på motoren: $P_1 = e \cdot i = k_E\, \Omega\, i$
Utgangseffekt fra motoren: $P_2 = T_m \Omega = k_T\, i\, \Omega$

Dermed skjønner vi hvorfor k_E og k_T er tilnærmet like og hvorfor k_E er litt større enn k_T .

Oppgave 2 *Blokkdiagram for motoren*

Blokkdiagrammet er tegnet i Simulink:

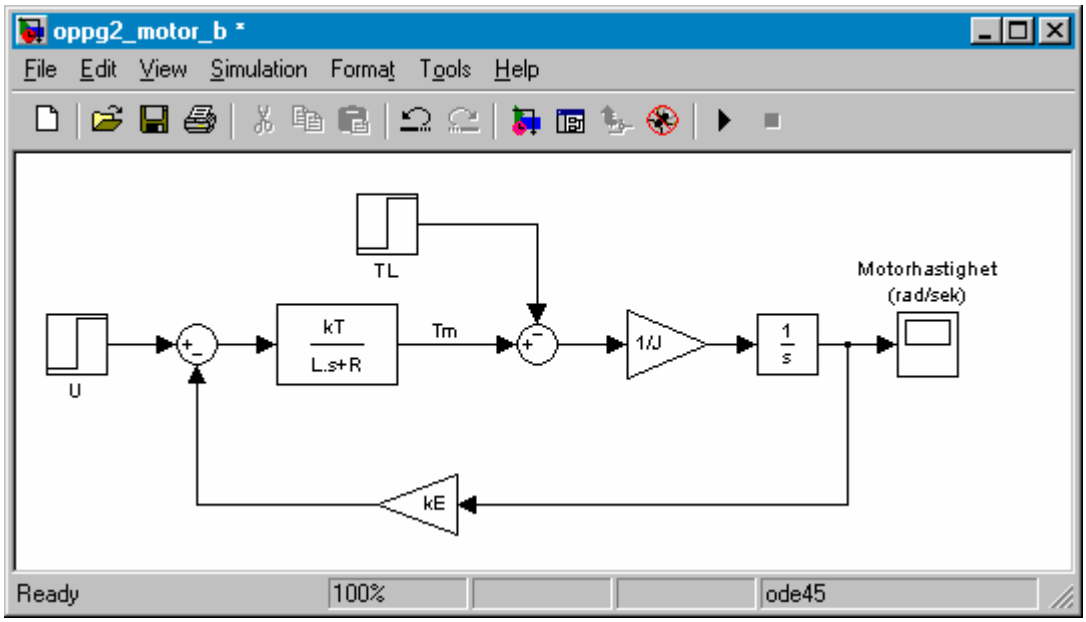


figur 1

Oppgave 3 *Blokkdiagram-reduksjon*
Vi begynner med å sette inn transferfunksjonen for den indre sløyfa. Her bruker vi tilbakekoplingsformelen:

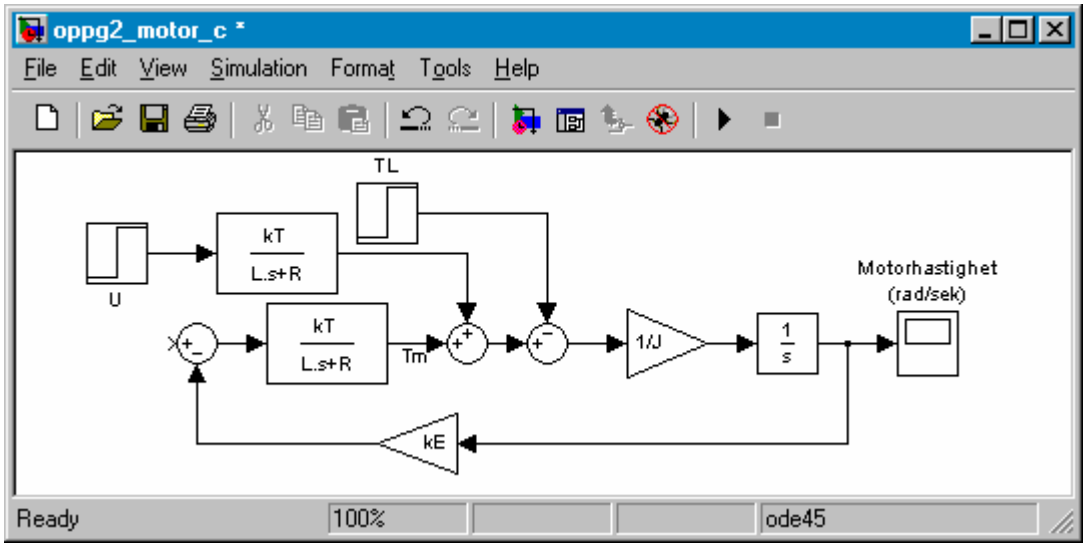
$$h_1(s) = \frac{\frac{1}{sL}}{1 + \frac{R}{sL}} = \frac{1}{R + sL} \qquad (7)$$

Vi får da fram følgende blokkdiagram (se neste side):



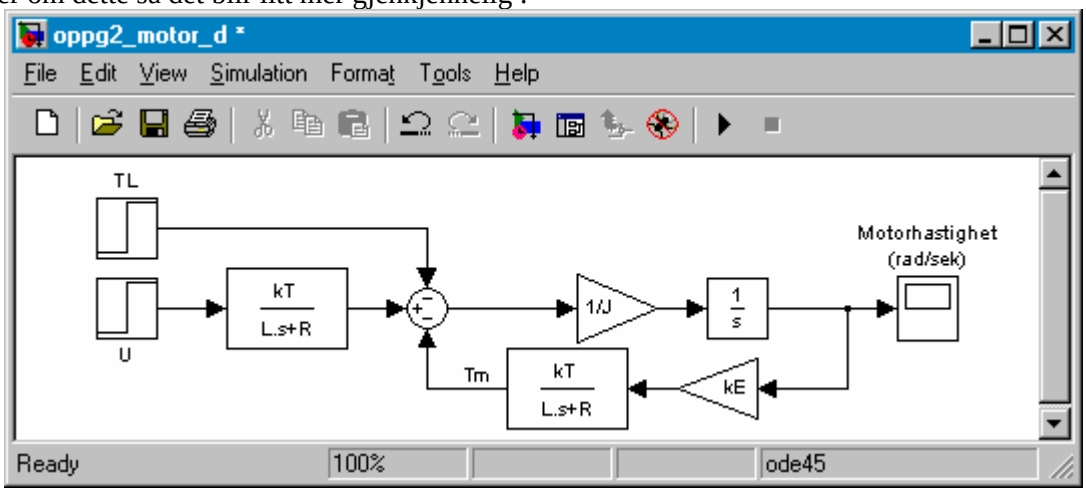
figur 2

Vi kan ikke gjøre noe med den neste sløyfa før vi har *flyttet på et summasjonspunkt* slik at de to ”angrepspunktene” fra U og T_L faller sammen. Vi velger å flytte summasjonspunktet for U et hakk fram:



figur 3

Vi tegner om dette så det blir litt mer gjenkjennelig :

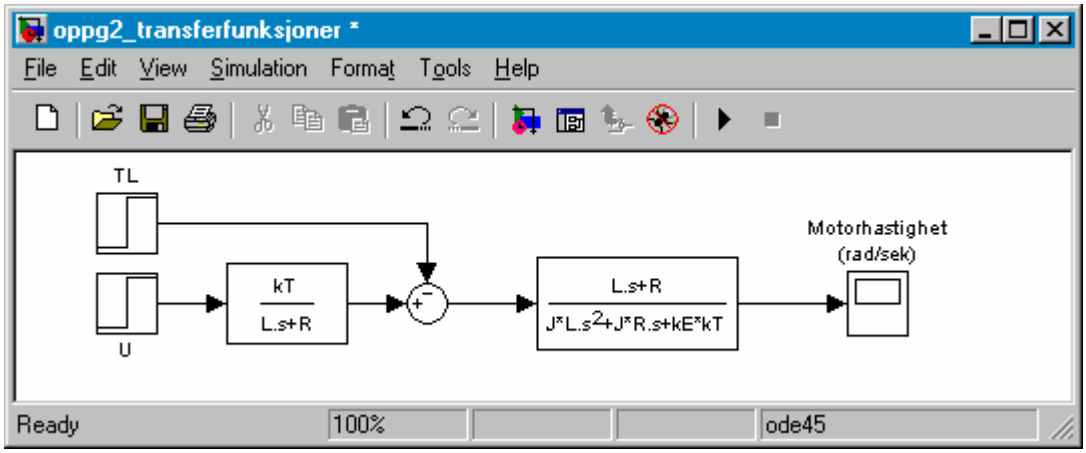


figur 3

Dermed har vi kun igjen å redusere den siste sløyfa:

$$\underline{h_2(s) = \frac{\frac{1}{Js}}{1+\frac{k_E k_T}{Js(R+sL)}} = \frac{R+sL}{Js(R+sL)+k_E k_T} = \frac{R+sL}{k_E k_T + JRs + JLs^2}}$$

og vi får blokkdiagrammet:



figur 4

Dermed finner vi transferfunksjonene direkte:

$$\underline{h_U(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{k_T}{k_E k_T + JRs + JLs^2}}$$

$$\underline{h_T(s) = \frac{\Omega(s)}{T_L(s)} = \frac{-(R+sL)}{k_E k_T + JRs + JLs^2}}$$

Oppgave 4 *Hastighets-servo med P-regulator. Stasjonær-avvik.*

Med P-regulator innkoplet blir sløyfeforsterkningen:

$h_0(s) = K_P \cdot h_U(s)$ Hvor K_P er regulator-forsterkningen.

Transferfunksjonen for servoen fra hastighets-referanse *R(s)* til servohastighet *Y(s)=Ω(s)* blir:

$$h_{YR}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{h_0(s)}{1+h_0(s)} = \frac{\frac{K_P k_T}{k_E k_T + JRs + JLs^2}}{1+\frac{K_P k_T}{k_E k_T + JRs + JLs^2}}$$

$$\underline{h_{YR}(s) = \frac{K_P k_T}{K_P k_T + k_E k_T + JRs + JLs^2}}$$

Servoen påtrykkes nå et sprang i hastighets-referansen på 75 rad/sek (ved $t = 0$). $\underline{R(s) = 75/s}$
Resultatet blir:

$$Y(s) = R(s) \cdot h_{YR}(s) = \frac{75}{s} \cdot \frac{K_P k_T}{K_P k_T + k_E k_T + JRs + JLs^2}$$

I følge sluttverditeoremet har vi:

$$\underline{\lim_{t\to\infty}\big(y(t)\big)} = \lim_{s\to 0}\big(sY(s)\big) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{75K_P k_T}{K_P k_T + k_E k_T + JRs + JLs^2}\right) = \underline{\frac{75K_P}{K_P + k_E}}$$

Dette gir:

$$K_P = 1: \quad \underline{\lim_{t\to\infty}\big(y(t)\big)} = \frac{75\cdot 1}{1+3,59}(\text{rad/sek}) \approx \underline{16,34\ \left[\text{rad/sek}\right]}$$

$$K_P = 10: \quad \underline{\lim_{t\to\infty}\big(y(t)\big)} = \frac{75\cdot 10}{10+3,59}(\text{rad/sek}) \approx \underline{55,19\ \left[\text{rad/sek}\right]}$$

$$K_P = 10: \quad \underline{\lim_{t\to\infty}\big(y(t)\big)} = \frac{75\cdot 100}{100+3,59}(\text{rad/sek}) \approx \underline{72,40\ \left[\text{rad/sek}\right]}$$

Vi ser at jo større regulatorforsterkning vi har desto mer nøyaktig vil stasjonær-utgangen følge referansen. *Men*: hvis vi har for stor forsterkning i regulerings-sløyfa får vi stabilitetsproblemer. Dette skal vi se på i neste spørsmål.

Oppgave 5 *Polbeliggenhet og respons*

Vi finner polene til en transferfunksjon ved å sette nevneren lik null og deretter løse for *s*:

$$H_{YR}(s) = \frac{K_P k_T}{K_P k_T + k_E k_T + JRs + JLs^2}$$

$$\underline{K_P = 1}: H_{YR}(s) = \frac{1\cdot 3,4}{1\cdot 3,4 + 3,59\cdot 3,4 + 0,334s + 5,84\cdot 10^{-3}s^2} = \frac{3,4}{5,84\cdot 10^{-3}s^2 + 0,334s + 15,61}$$

$$H_{YR}(s) = \frac{582,2}{s^2 + 57,19s + 2673}$$

Poler: $s^2 + 57,19s + 2673 = 0 \Rightarrow \underline{s = -28,60 \pm j43,07}$

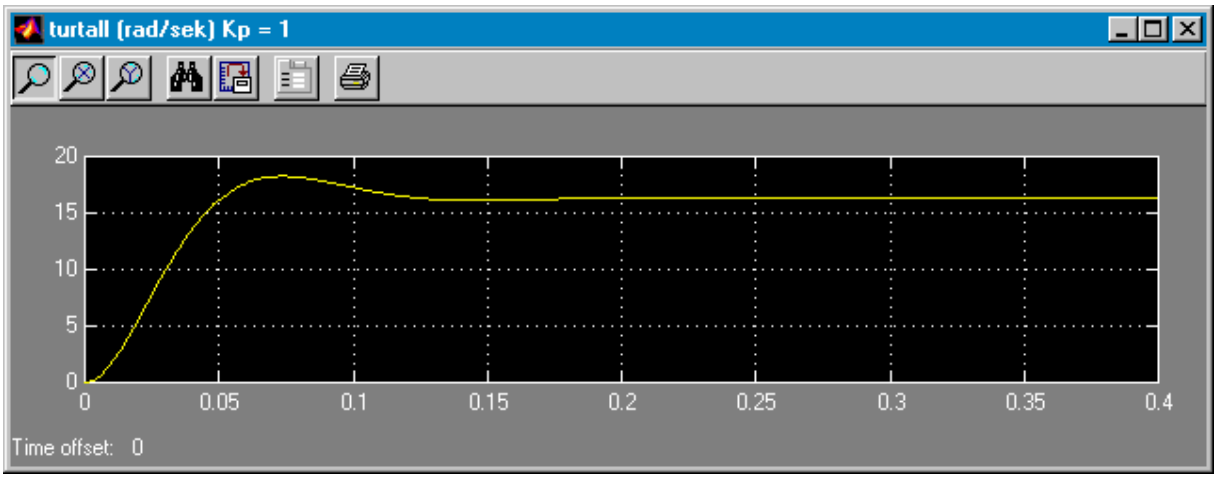
$\underline{K_P = 10}$: $10\cdot 3,4 + 3,59\cdot 3,4 + 0,334s + 5,84\cdot 10^{-3}s^2 = 0$

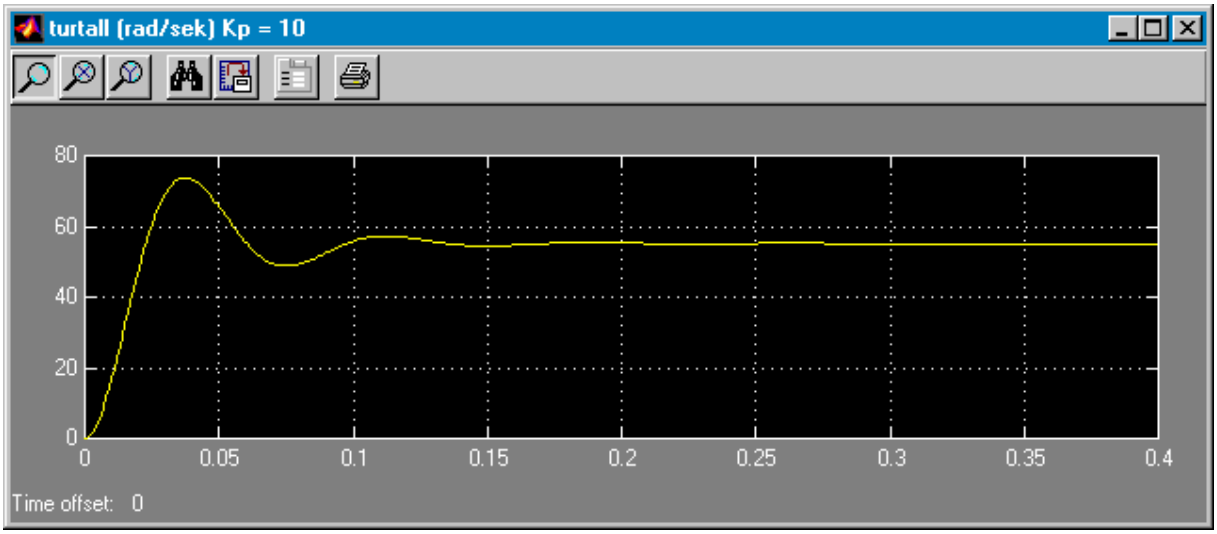
$\Rightarrow \underline{s = -28,60 \pm j84,23}$

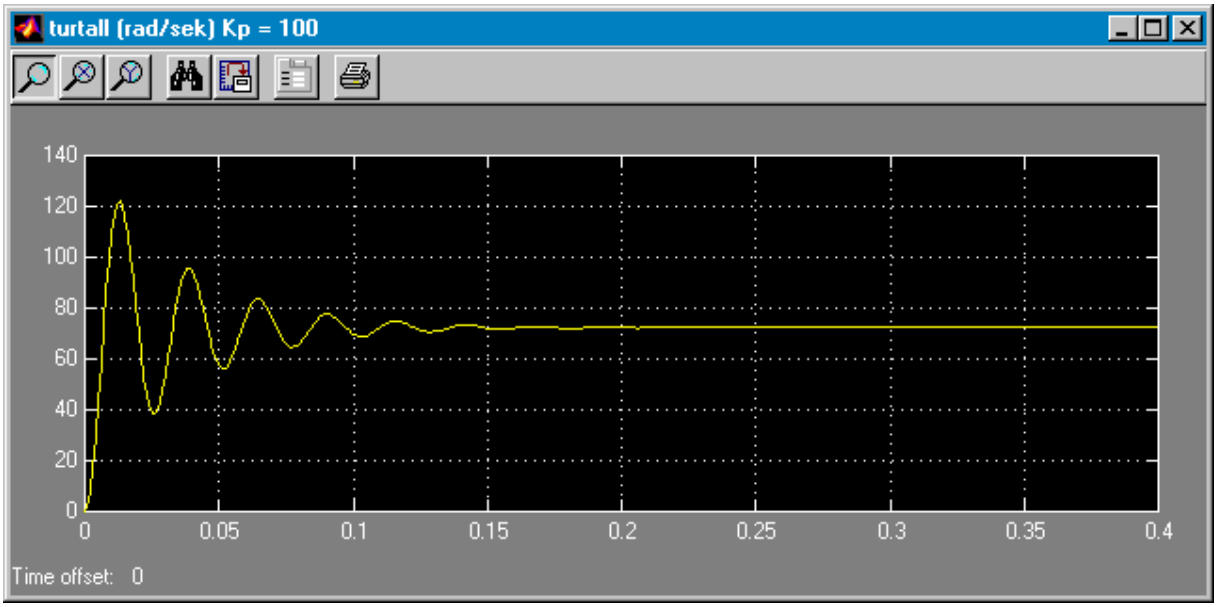
$\underline{K_P = 100}$: $100\cdot 3,4 + 3,59\cdot 3,4 + 0,334s + 5,84\cdot 10^{-3}s^2 = 0$

$\Rightarrow \underline{s = -28,60 \pm j243,9}$

Vi ser at polene har samme realdel uansett forsterkning. Derimot øker imaginærdelen med forsterkningen. Dette betyr i praksis at systemet svinger sterkere når K_P økes.
På neste side er vist simuleringer av servoen for K_P = 1, 10 og 100:


turtall (rad/sek) Kp = 1
20
15
10
5
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
Time offset: 0


turtall (rad/sek) Kp = 10
80
60
40
20
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
Time offset: 0


turtall (rad/sek) Kp = 100
140
120
100
80
60
40
20
0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0.35
0.4
Time offset: 0