Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 7 , Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: Bode-diagram

Oppgaven gikk ut på å tegne Bode-diagram med tre forskjellige metoder:

1 Plotteformel
2 **bode**-kommandoen i Matlab
3 Asymptotisk tilnærming

I dette løsningsforslaget slår vi sammen metode (1) og (3) og deretter tar vi metode (2) for seg.

1)

$$h_1(s) = \frac{5}{1+0,001s} \equiv \frac{K}{1+Ts} \Rightarrow \quad K = 5 \quad T = 0,001$$

Lavfrekvens-asymtoten (LFA): $20\log(K) \simeq 14\,\text{dB}$

Knekkfrekvens: $\omega_1 = \frac{1}{T} = 1000\left[\text{rad/sek}\right]$

Siden dette er en 1.ordens funksjon og knekkfrekvensen skyldes *nevneren* får vi en 1.ordens knekk nedover ved denne frekvensen.

Faseasymptotene følger forsterkningen: 0 grader fram til knekkfrekvensen, deretter -90 grader

Plotteformel:

$$h_1(j\omega) = \frac{5}{1+j\cdot 0,001\omega} \quad \text{som gir:}$$

$$\left|h_1(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{5}{\sqrt{1+10^{-6}\omega^2}}\right)$$

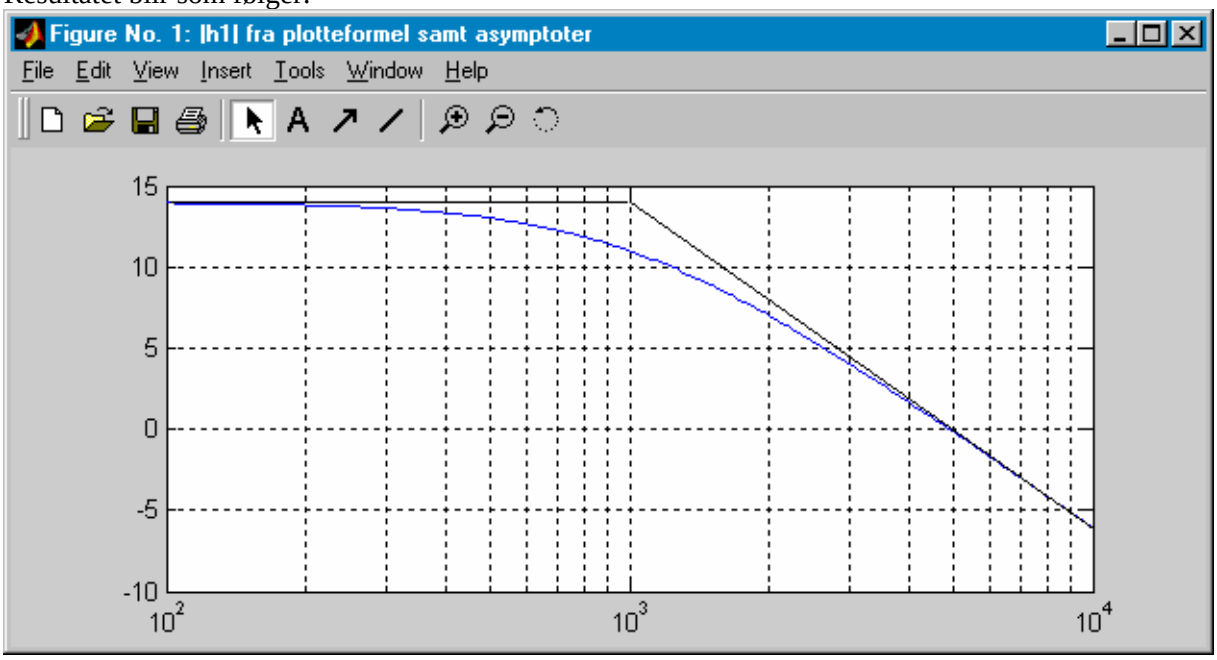
$$\angle h_1(j\omega) = -\tan^{-1}\left(10^{-3}\omega\right)$$

Vi bruker Matlab til å plotte både asymptoter og fullstendige kurver ut fra plotteformel. Resultatet er vist på neste side:

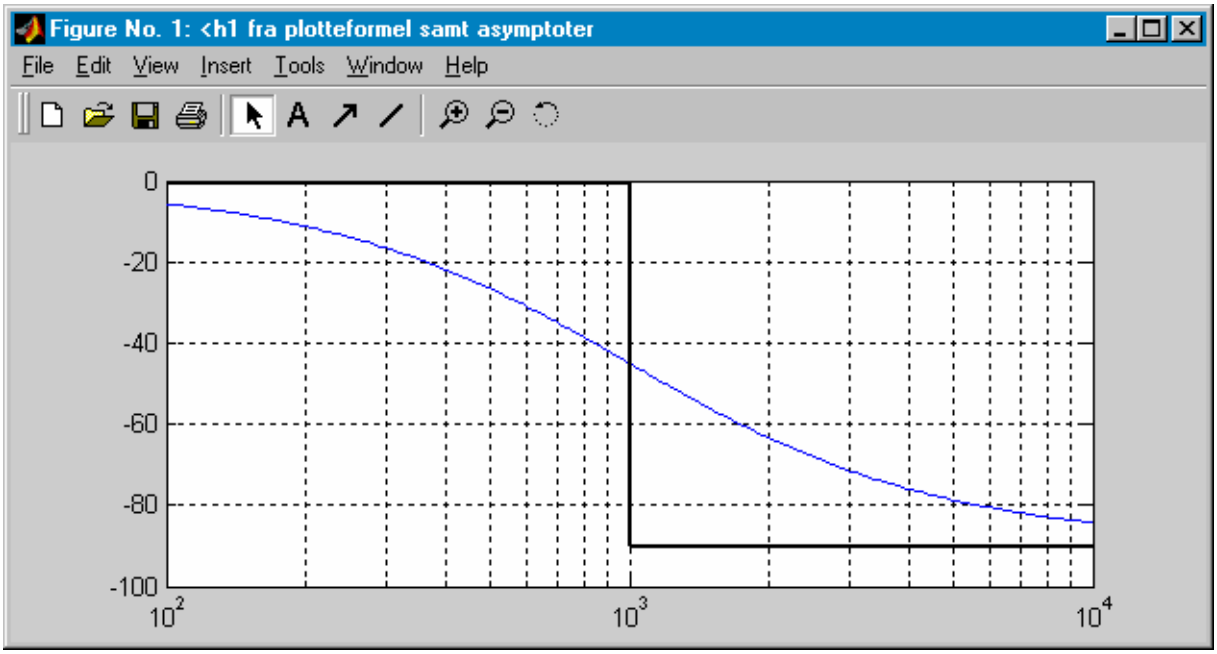
I Matlab skriver vi:

```
>> K=5; T=0.001;
>> w=logspace(2,4,200);
>> A1=20*log10(K./sqrt(1+(w*T).^2));
>> v1=-(180/pi)*atan(w*T);
>> semilogx(w,A1), grid
>> semilogx(w,v1), grid
```

Resultatet blir som følger:



figur 1

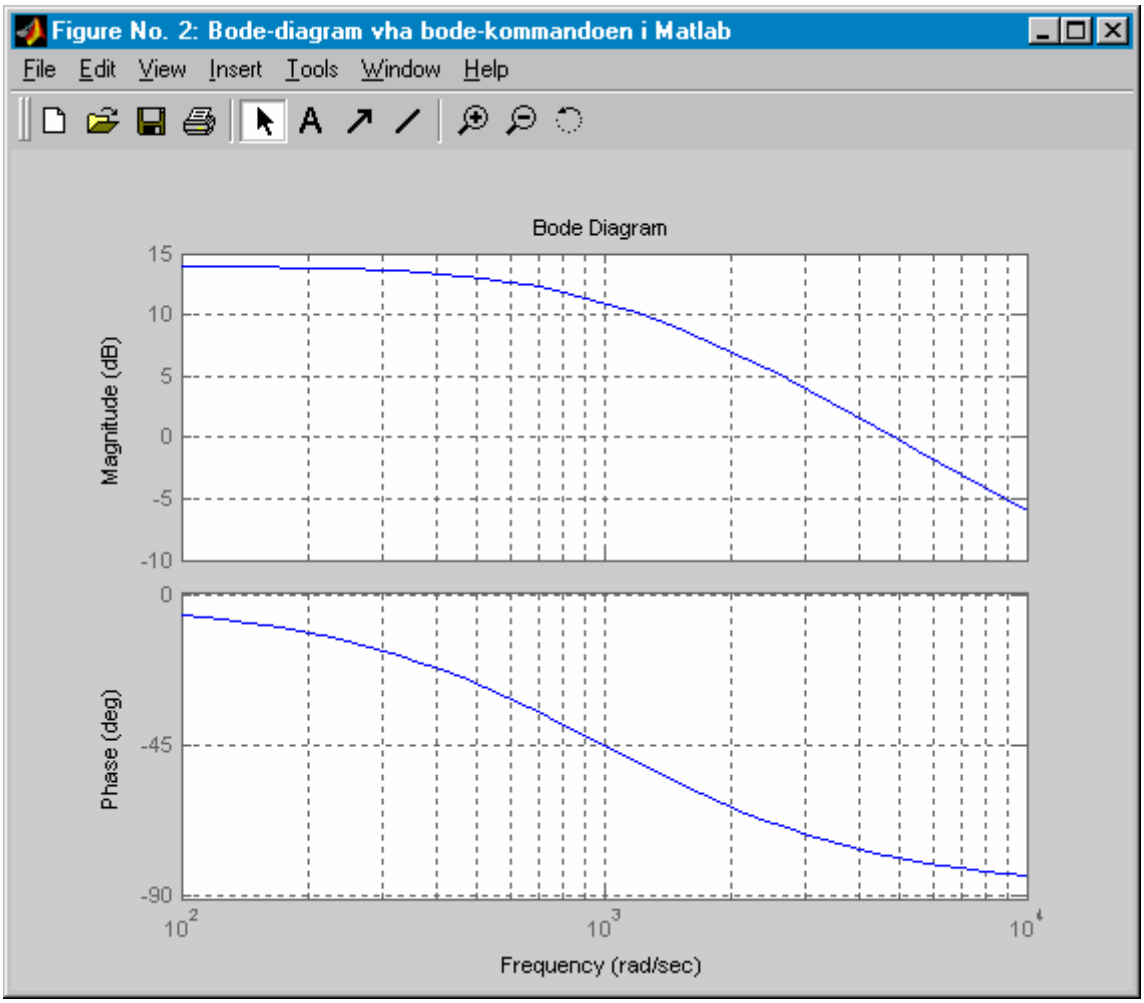


figur 2

bode-kommandoen i Matlab bruker vi på denne måten:

```
>> teller=K; nevner=[T 1];
>> sys=tf(teller,nevner);
>> bode(sys), grid
```

Vi får følgende diagram som vi ser stemmer helt med det vi fant med plotteformelen:

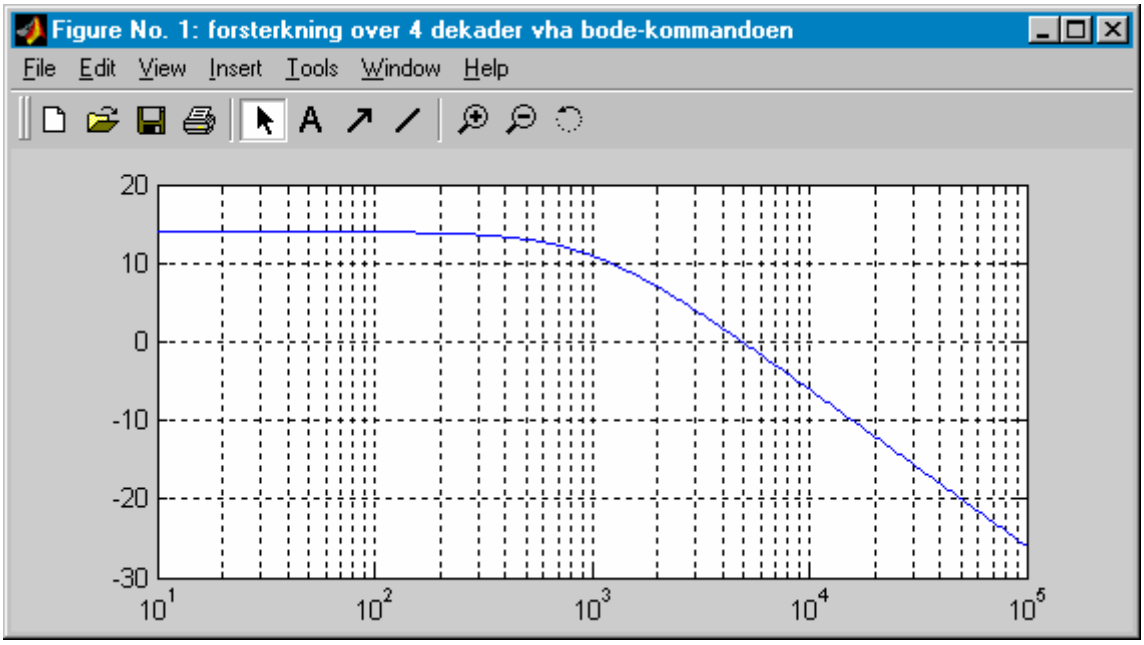


figur 3

For øvrig kan bode-kommandoen brukes sammen med egendefinert frekvensområde slik at man selv har styringen med dette samt med hvilket av de to diagrammene som skal genereres. La oss for eksempel si at vi er interessert i å se på forsterkningen (men ikke fasen) over 4 dekader. Vi kan gå fram som følger:

```
>> w=logspace(1,5,400);
>> [A2,v2]=bode(sys,w);
>> A2dB=20*log10(A2);
      >> for n = 1:400,          % AdB må gis riktig format (vektor-format)
      AdB(1,n)=A2dB(:,:,n);      % I utg.punktet er den gitt som 3-dim. matrise !
      end
>> semilogx(w,AdB), grid
```

Resultatet er vist på neste side:



figur 4

2)

$$h_2(s) = \frac{5 \cdot e^{-0,002s}}{1 + 0,001s}$$

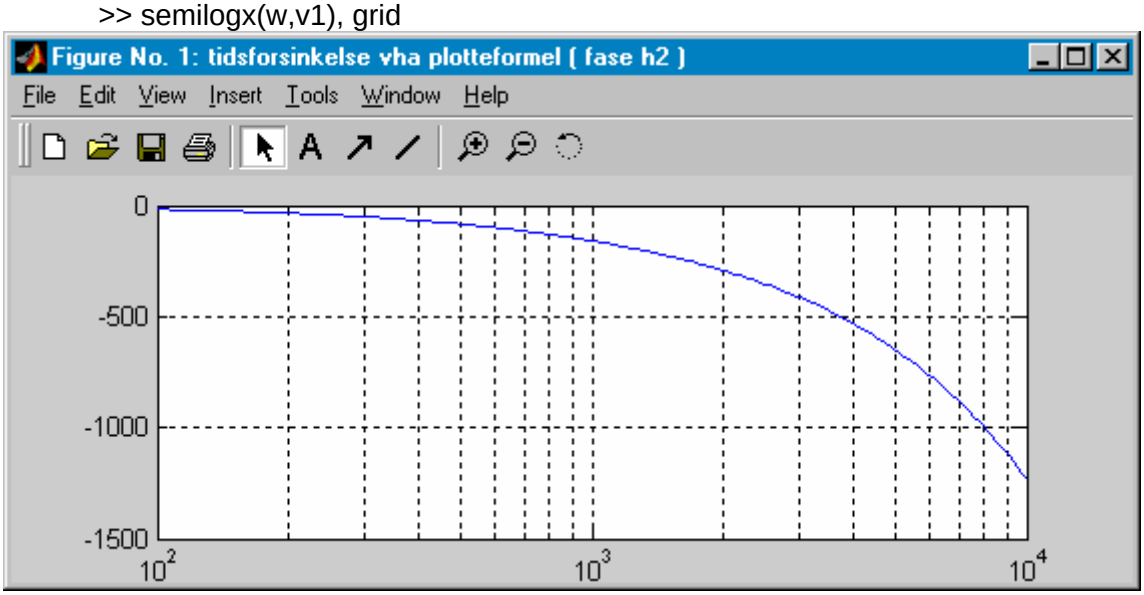
Dette er samme funksjon som $h_1(s)$ bortsett fra tidsforsinkelsen på 0,002 sek. Tisforsinkelsen virker bare inn på fasen, forsterkning blir overhode ikke berørt mens faseasymptoter blir verdiløse. Vi får:

$$\left|h_2(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\left(\frac{5}{\sqrt{1+10^{-6}\omega^2}}\right)$$

$$\angle h_2(j\omega) = -\tan^{-1}\left(10^{-3}\omega\right) - \omega\tau\,[\text{rad}]$$

Forsterkningen har vi plotte tidligere. Vi plotter nå fasen:

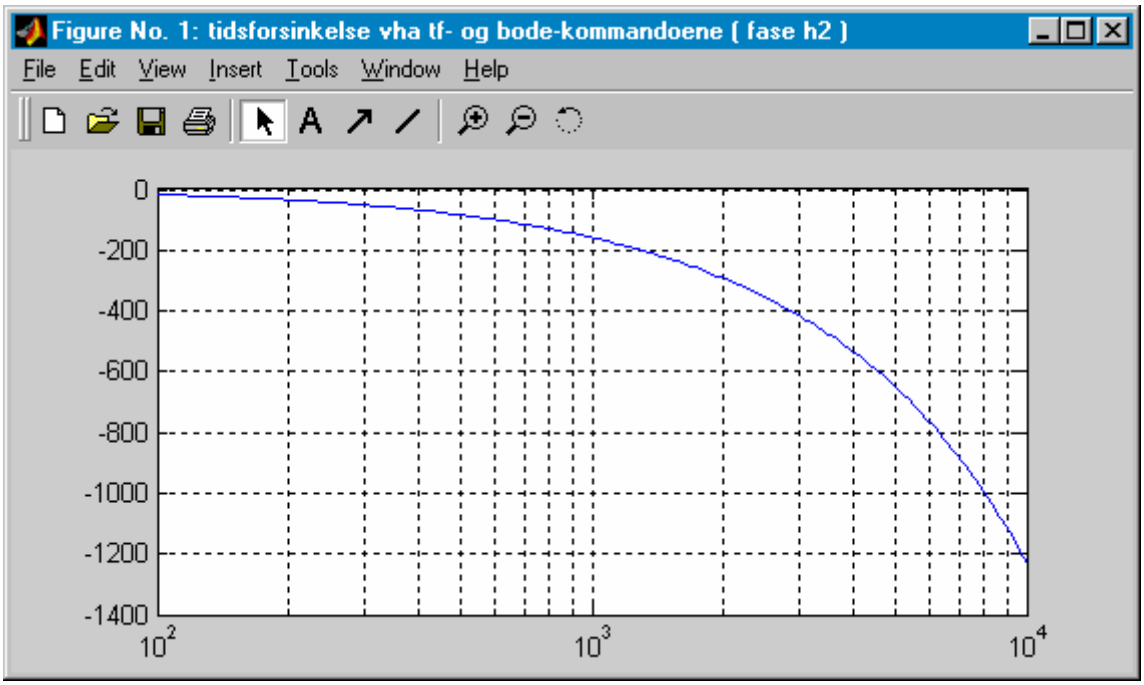
```
>> w=logspace(2,4,200);
>> tau=0.002;
>> v1=(180/pi)*(-atan(w*T)-w*tau);    % (180/pi) konverterer fra radianer til grader
>> semilogx(w,v1), grid
```



figur 5

Tidsforsinkelse kan vi også ta hånd om i systemdefinisjonen og dermed bruke **bode**-kommandoen også her:

```
>> tellet=K; nevner=[T 1];
>> sys=tf(teller,nevner,'iodelay',tau);
>> w=logspace(2,4,200);
>> [A2,v2]=bode(sys,w);
>> v=zeros(200,1);
>> for n=1:200,
        v(n,1)=v2(:,:,n);
   end
>> semilogx(w,v), grid
```



figur 6

Legg for øvrig merke til at når vi bruker bode-kommandoen til å regne ut fase trenger vi ikke konvertere fra radianer til grader, det skjer automatisk.

3)

Her hadde det sneket seg inn en liten feil i oppgaveteksten. Transferfunksjonen til en PID-regulator ser slik ut:

$$h_R(s) = K_P \frac{(1+T_I s)(1+T_D s)}{T_I s(1+T_F s)}$$

Den funksjonen som faktisk ble oppgitt var:

$$h_3(s) = K_P \frac{(1+T_I s)(1+T_D s)}{s(1+T_F s)} \quad \therefore \; T_I \text{ i nevneren har altså falt ut}$$

Vi kommer i dette løsningsforslaget til å holde oss til $h_3(s)$.

Regulatorparametre: $K_P = 4 \quad T_I = 10 \quad T_D = 2,5 \quad T_F = 0,25$

(alle tidskonstanter i sekunder)

Plotteformler:

$$h_3(j\omega) = K_P \frac{(1+ j\omega T_I)(1+ j\omega T_D)}{j\omega(1+ j\omega T_F)}$$ Dermed får vi:

$$\underline{|h_3(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{K_P}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{1+(\omega T_I)^2}\sqrt{1+(\omega T_D)^2}}{\sqrt{1+(\omega T_F)^2}} \right)}$$

$$\underline{\angle h_3(j\omega) = -\frac{\pi}{2} + \tan^{-1}(\omega T_I) + \tan^{-1}(\omega T_D) - \tan^{-1}(\omega T_F)}$$

Asymptoter:

$\text{LFA}(s \to 0)$ $\quad h_3(s) \to \frac{K_P}{s} \Rightarrow h_3(j\omega) \to \frac{K_P}{j\omega}$

Dvs. LFA for forsterkningen blir $\frac{K_P}{\omega}$

Skjæring med 40-dB linja: $\frac{K_P}{\omega} = 100\,(40 \text{ dB}) \Rightarrow \underline{\omega = \frac{K_P}{100} = 0,04}$

mens LFA for fasen blir -90°

Knekkfrekvenser:

$\omega_1 = \frac{1}{T_I} = 0,1\left[\text{rad/s}\right]$ (1.ordens knekk oppover)

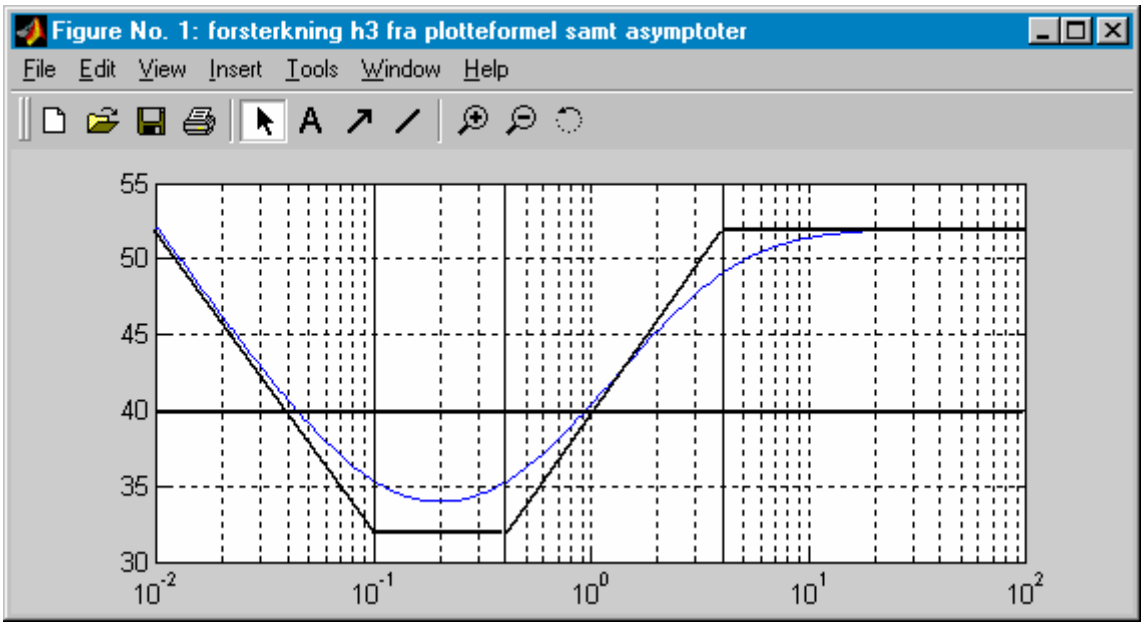
$\omega_2 = \frac{1}{T_D} = 0,4\left[\text{rad/s}\right]$ (1.ordens knekk oppover)

$\omega_3 = \frac{1}{T_F} = 4,0\left[\text{rad/s}\right]$ (1.ordens knekk nedover)

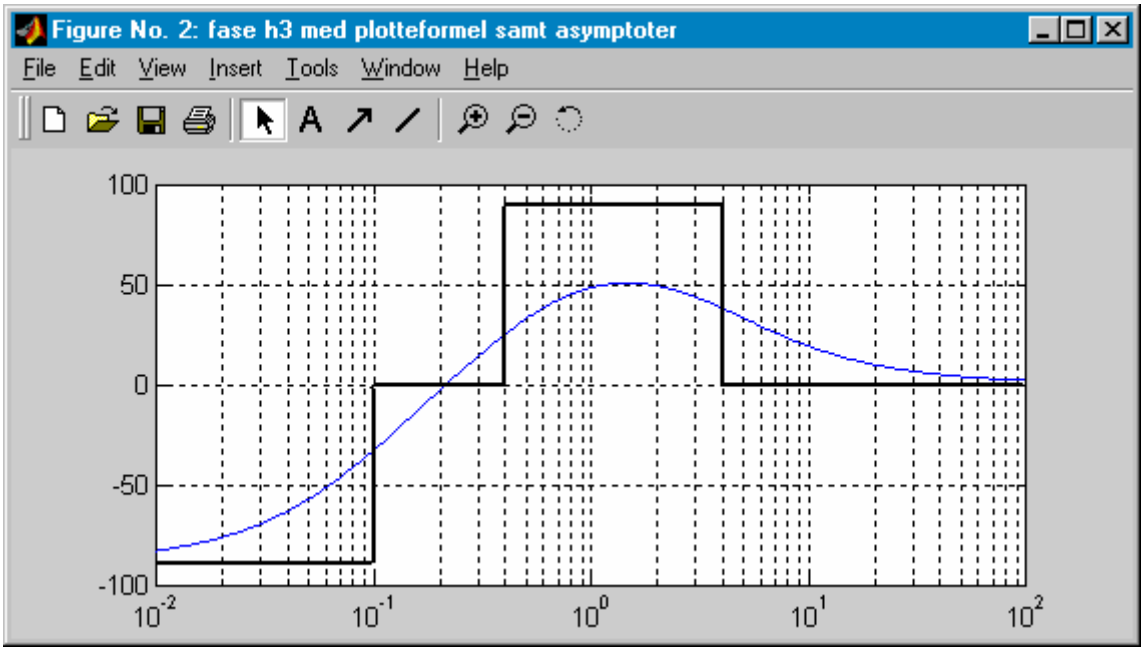
I Matlab går vi fram som følger:

```
>> Kp=4; Ti=10; Td=2.5; Tf=0.25;
>> w=logspace(-2,2,400);
>> f1=sqrt(1+(w*Ti).^2);
>> f2=sqrt(1+(w*Td).^2);
>> f3=sqrt(1+(w*Tf).^2);
>> A1=20*log10((Kp*f1.*f2)./(w.*f3));
>> v1=-90+(180/pi)*(atan(w*Ti)+atan(w*Td)-atan(w*Tf));
>> semilogx(w,A1), grid
>> figure(2)
>> semilogx(w,v1), grid
>> axis([1e-2 100 -100 100])
```

Resultatene er vist på neste side:



figur 7

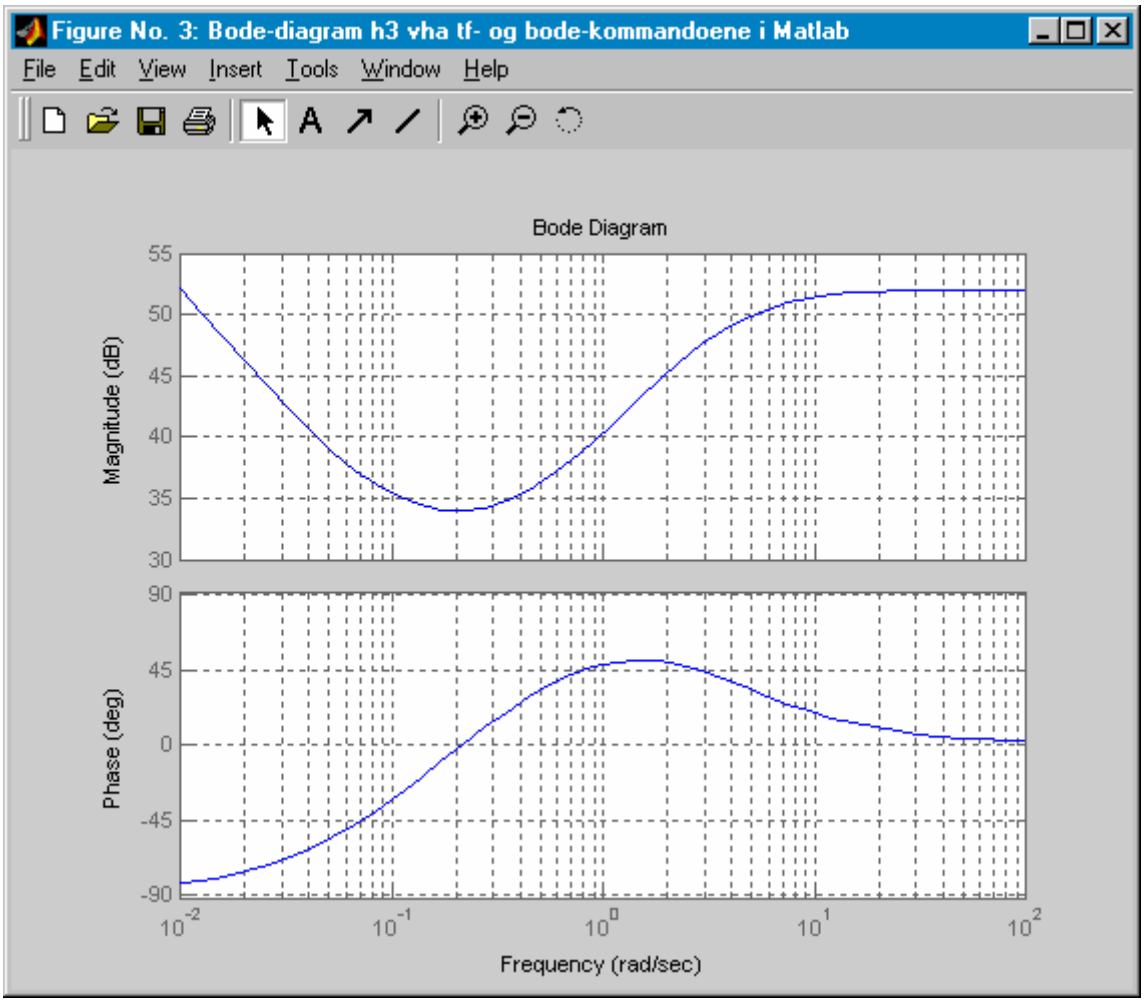


figur 8

Her går det selvfølgelig mye enklere med bruk av **bode**-komandoen:

```
>> t1=[Ti 1]; t2=[Td 1]; teller=Kp*conv(t1,t2);
>> n1=[1 0]; n2=[Tf 1]; nevner=conv(n1,n2);
>> sys=tf(teller,nevner);
>> figure(3), bode(sys), grid
```

Se neste side:



figur 9

4)

$$h_4(s) = \frac{2}{1+0.04s+0.01s^2} \equiv \frac{K}{1+\frac{2\zeta}{\omega_0}s+\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{K=2} \quad \underline{\omega_0 = 10} \quad \underline{\zeta = 0{,}2}$$

Plotteformler:

$$h_4(j\omega) = \frac{K}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\cdot 2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}} \qquad \text{Dette gir :}$$

$$\left|h_4(j\omega)\right|_{dB} = 20\log\frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$< h_4(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\right)$$

Asymptoter:

LFA $\rightarrow K$ når $s \rightarrow 0$ dvs : LFA $\rightarrow 2 = 6$ dB

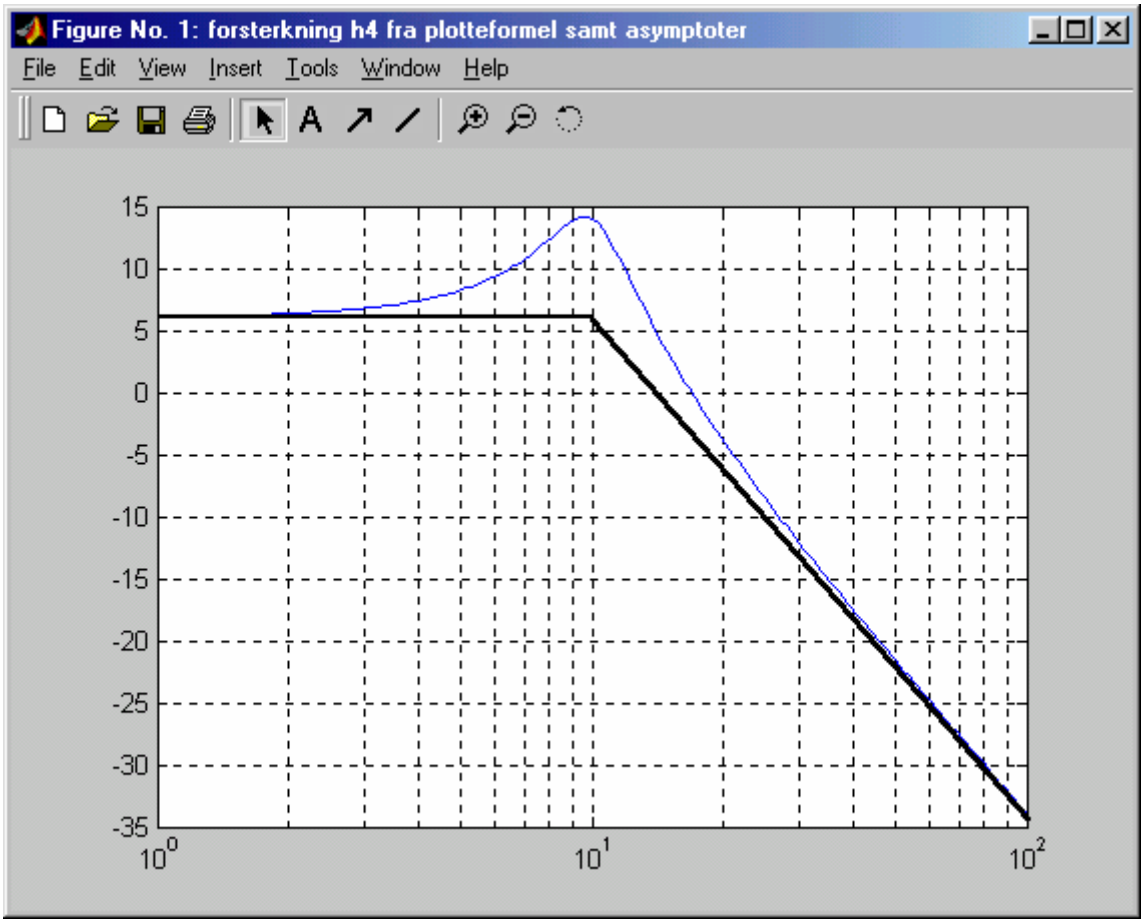
Fasen går mot 0 grader ved lave frekvenser.

Knekkfrekvensen er $\omega_0 = 10$ rad/sek Dette er en 2.ordens knekk nedover

Forsterkninga går da nedover med helning - 2 dvs. - 40 dB/dekade. Fasen faller180°.

Vi bruker Matlab til å lage Bode-diagram ut fra formlene:

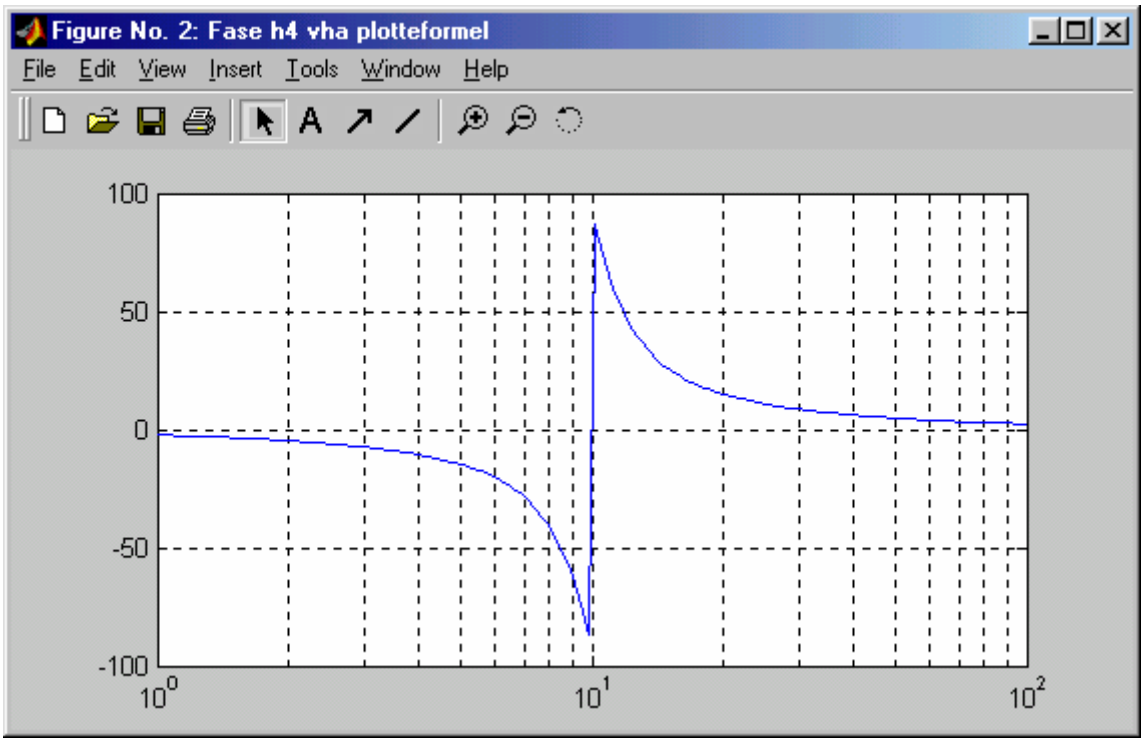
```
>> K=2; z=0.2; w0=10;
>> w=logspace(0,2,200);
>> Re=1-(w/w0).^2;  Im=2*z*w/w0;
>> A1=K./sqrt(Re.^2+Im.^2);
>> A1dB=20*log10(A1);
>> v1=-(180/pi)*atan(2*z*w0*w./(w0^2-w.^2));
>> semilogx(w,A1dB), grid
```



figur 10

Vi plotter også fasen:

```
>> figure(2)
>> semilogx(w,v1), grid
```



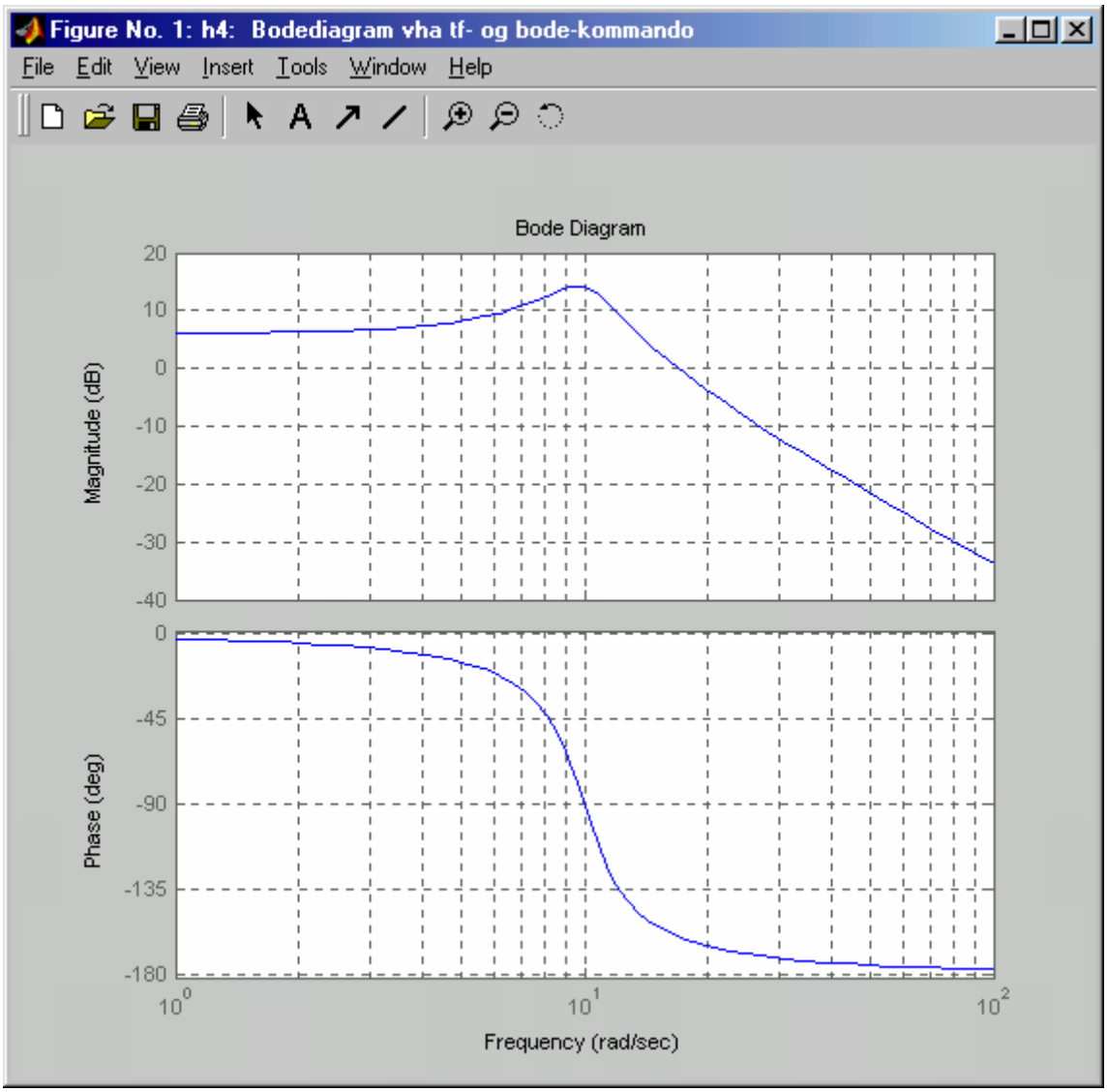
figur 11

Vi ser at **atan**- funksjonen er laget slik at den tolker alle vinkler i 1. eller 4. kvadrant. Det går an å omgå dette problemet men vi forfølger ikke det videre her.

*bruk av **tf**- og **bode**- funksjon i Matlab:*

```
>> teller=K; nevner=[0.01 0.04 1];
>> sys=tf(teller,nevner);
>> bode(sys)
```

Bodediagrammet er vist på neste side.


Figure No. 1: h4: Bodediagram vha tf- og bode-kommando
File Edit View Insert Tools Window Help
Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
10
0
-10
-20
-30
-40
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
10^0
10^1
10^2
Frequency (rad/sec)

figur 12