Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for teknologi
Program for Elektro- og Datateknikk

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 9, Løsningsforslag

Høsten 2004

Emne: ***Rekker, konvergens, potensrekker, annuitetsberegninger.***

Avsnitt 6.2 (s.184) oppg. 7:
Gitt differenslikningen:

$$x[n+2] - x[n+1] = 3x[n] \qquad n = 0,1,2,3\ldots$$

Initialbetingelser: $x[0] = 1$, $x[1] = 2$

Finn $x[2], x[3],\ldots, x[6]$

Den gitte likning kan skrives: $x[n+2] = x[n+1] + 3x[n]$

Setter vi inn $n = 0$ får vi: $x[2] = x[1] + 3x[0] = 2 + 3\cdot 1 = 5$
Setter vi inn $n = 1$ får vi: $x[3] = x[2] + 3x[1] = 5 + 3\cdot 2 = 11$
Setter vi inn $n = 2$ får vi: $x[4] = x[3] + 3x[2] = 11 + 3\cdot 5 = 26$
Setter vi inn $n = 3$ får vi: $x[5] = x[4] + 3x[3] = 26 + 3\cdot 11 = 59$
Setter vi inn $n = 4$ får vi: $x[6] = x[5] + 3x[4] = 59 + 3\cdot 26 = 137$

Avsnitt 6.2 (s.184) oppg. 16:

a) $\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{k\to\infty} k^3 \to \infty$ dvs. sekvensen divergerer

b) $$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{k\to\infty} \frac{2k+3}{4k+2} = \lim_{k\to\infty} \frac{2 + 3/k}{4 + 2/k} = \frac{2}{4} = 0,5$$

c) $$\lim_{k\to\infty} x[k] = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+k}{k^2+k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1 + 1/k}{1 + 1/k + 1/k^2} = 1$$

Avsnitt 6.3 (s.190) oppg. 1:

En aritmetisk rekke er gitt ved:

$$S_k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k$$

Hvor: $u_1 = a \quad u_2 = a + d \quad u_3 = a + 2d ... \quad u_n = a + (k-1)d$

Vi får altså:

a = første tall i rekka (u_1)
d = differanse mellom to etterfølgende tall
k = antall tall i rekka

På side 186 står formelen for summen av en aritmetisk rekke:

$$S_k = \frac{k}{2}\left[2a + (k-1)d\right]$$

I oppgaven er oppgitt første ledd = 4 og siste (30.) ledd = 1000

Sammenholder vi det som står i hakeparentesen ovenfor med uttrykket for u_k ser vi at det blir lik summen av første og siste ledd, dvs formelen kan også skrives:

$$S_k = \frac{k}{2}\left[u_1 + u_k\right]$$

Men da blir oppgaven enkel: $S_k = 15(4 + 1000) = \underline{15060}$

Avsnitt 6.3 (s.190) oppg. 8:

Formelen for summen av en uendelig geometrisk rekke står på side 189:

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$ Hvor a er første ledd i rekka og r er multiplikasjonsfaktoren.

I følge oppgaven skal denne summen være lik $4a$. Vi får da:

$$\frac{a}{1-r} = 4a \Rightarrow \frac{1}{1-r} = 4 \Rightarrow 1 - r = \tfrac{1}{4} \Rightarrow \underline{r = \tfrac{3}{4}}$$

Avsnitt 6.4 (s.193) oppg. 3:

Vi skal multiplisere ut $(2x + 3y)^4$ ved hjelp av Pascals trekant. Den ser slik ut:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \end{array}$$

Dette tolkes slik:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ dvs:

$$(2x+3y)^4 = (2x)^4 + 4\cdot(2x)^3\cdot 3y + 6\cdot(2x)^2(3y)^2 + 4\cdot 2x(3y)^3 + (3y)^4$$

$$\underline{(2x+3y)^4 = 16x^4 + 96x^3y + 216x^2y^2 + 216xy^3 + 81y^4}$$

Avsnitt 6.4 (s.193) oppg. 9:

Vi skal utvikle følgende funksjon som potensrekke opp t.o.m 4. ledd:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+1/x}} = \left(1+1/x\right)^{-\frac{1}{2}}$$ Setter vi $y = \frac{1}{x}$ får vi:

$$\underline{f(y) = (1+y)^{-\frac{1}{2}}}$$

Vi utvikler potensrekken etter binomialformelen s. 192:

$$f(y) = 1 - \tfrac{1}{2}y + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}y^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}y^3$$

$f(y) = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 - \frac{5}{16}y^3 + \ldots$ Setter så inn $y = x^{-1}$:

$$\underline{f(x) = 1 - \tfrac{1}{2}x^{-1} + \tfrac{3}{8}x^{-2} - \tfrac{5}{16}x^{-3} + \ldots}$$

Avsnitt 6.5 (s.196) oppg. 1:

Potensrekka for e^x er gitt ved:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Vi kaller selve funksjonen $f(x) = e^x$ og potensrekka fram til 4. ledd $p_4(x)$ og sammenlikner disse for noen verdier av x.

x = 0:	$f(0) = 1$	$p_4(0) = 1$	(eksakt)
x = 0,1:	$f(0,1) \approx 1,1051709$	$p_4(0,1) \approx 1,1051667$	(6 sifres nøyaktighet)
x = 0,5:	$f(0,5) \approx 1,6487213$	$p_4(0,5) \approx 1,6458333$	(3 sifres nøyaktighet)
x = 1,0:	$f(1,0) \approx 2,7182818$	$p_4(0,1) \approx 2,6666667$	(2 sifres nøyaktighet)

Vi ser at for x-verdier fram til 0,5 vil det vanligvis greie seg med de 4 første leddene.
" " " " " " " " 0,1 " " " " " " " 2 " "

Dersom $x > 0,5$ bør vi ha med flere ledd.

Avsnitt 6.5 (s.196) oppg. 2:
Ut fra potensrekka til cos*(x)* skal vi finne potensrekka til cos*(2x)* og cos*(x/2)*.

a. *f(x) = cos(2x)*
Potensrekka for cos*(x):*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Vi setter inn $2x$ istedenfor x i denne formelen:

$$\cos(2x) = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \cdots$$

b. *f(x) = cos(x/2)*

Vi setter inn *x/2* istedenfor x i formelen for cos*(x):*

$$\cos(2x) = 1 - \frac{x^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{2^4 x^4}{2^4 \cdot 4!} - \frac{2^6 x^6}{2^6 \cdot 6!} + \cdots$$

Annuitetsoppgaver:

1. Til finansiering av bolig trenger du å låne kr. 800 000,-
   Lånetiden er 10 år, nominell rente er 8% p.a.
   Hvor stort blir det månedlige avdraget ?
   Hvor stort blir avdraget hvis lånetiden settes til 20 år ?

Løsning:

Utgangspunktet for alle annuitetsberegninger er den såkalte annuitetsformelen som kan utledes vha geometriske rekker. Vi starter med følgende definisjoner:

K - lånekapital
r - rente (angitt som desimaltall f.eks 8% = 0,08)
n - avdragstid i antall år
a - månedlig avdragsbeløp
K_n - "oppspart" beløp etter n år. (Sett fra bankens side er lånet en investering)

Sett fra bankens side:

$$K_n = K(1+r)^n$$ (rentes-rente formelen)

Sett fra låntagerens side:

$$K_n = a + a\left(1+\frac{r}{12}\right) + a\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 + \cdots + a\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n-1}$$

Formelen kan forstås slik: Det første leddet a representerer det siste avdraget og forrenter seg ikke. Det neste leddet er nest siste avdrag som forrenter seg i en måned. Det tredje leddet er tredje siste avdrag som forrenter seg i 2 måneder (etter rentes-rente formelen) osv helt fram til det siste leddet som repr. første avdrag. Dette avdraget betales etter en måned og forrenter seg dermed i $(12n - 1)$ måneder.

Vønsker nå å beregne summen av denne rekka. Vi ser at dette er en geometrisk rekke med felles faktor (1 + r/12). Vi kan nå bruke en formel fra boka eller regne det ut sjøl:

$$K_n\left(1+\frac{r}{12}\right) = a\left(1+\frac{r}{12}\right) + a\left(1+\frac{r}{12}\right)^2 + a\left(1+\frac{r}{12}\right)^3 + \cdots + a\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$$

Hvis vi trekker den første rekka fra denne faller de fleste leddene bort og vi får:

$$K_n\left(1+\frac{r}{12}\right) - K_n = a\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n} - a \Rightarrow K_n \cdot \frac{r}{12} = a\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \underline{K_n = \frac{12a}{r}\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n} - 1\right] = K(1+r)^n}$$

Dette er den såkalte annuitetsformelen som du kan bruke i alle slike sammenhenger.

I den første oppgaven er *K, r* og *n* gitt mens *a* er ukjent. Vi bruker annuitesformelen og løser for *a* :

$$a = \frac{K\left(\frac{r}{12}\right)(1+r)^n}{\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}-1\right]} \approx \underline{\underline{kr\ 9440{,}70}}$$

Dersom avdragstiden økes til 10 år bruker vi den samme formelen men med n=10 og får:

$\underline{a = \text{kr. } 6330{,}45}$

2. Du har ikke råd til det første alternativet og velger derfor 20 års avdragstid. Renta gjør så et hopp til 10% p.a. Hva blir det månedlige avdraget nå ?

Løsning:

Igjen kan vi bruke den samme formelen men med andre tallverdier:

$\underline{a = \text{kr. } 7087.46}$

3. ** Renta faller så tilbake til 8% p.a. igjen. men du synes at du har råd til å fortsette med det nye avdraget. Hvor mye får du redusert lånetiden ?

Løsning:

Denne gangen er det *n* som er ukjent. Vi må altså løse annuitetsformelen mht *n.*
La oss først stille opp problemet klart:

$K = 800\,000$ $r = 0{,}08$ $a = 7087{,}46$ Finn n utfra likningen:

$$\frac{12a}{r}\left[\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}-1\right] = K(1+r)^n$$

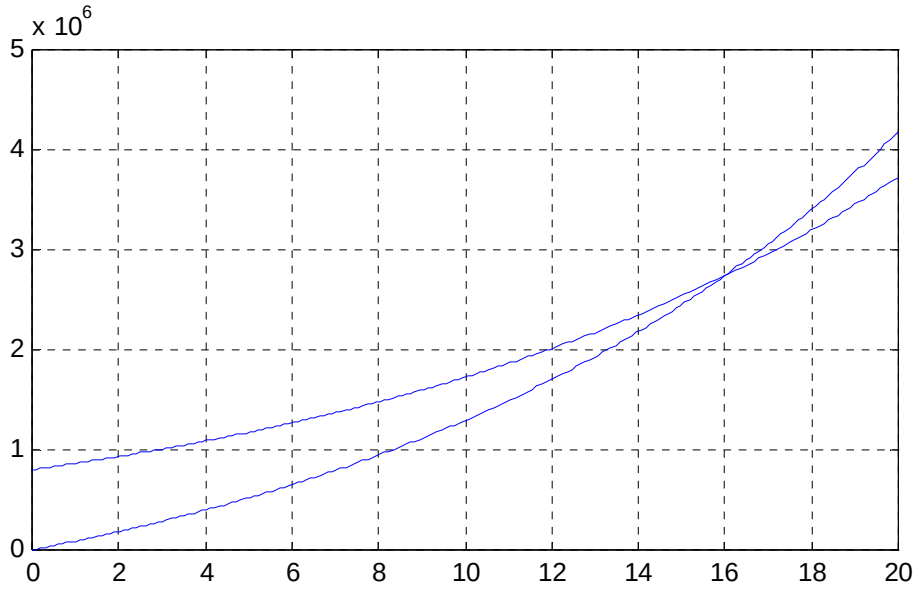
Det viser seg at det er vanskelig å løse denne eksakt mht *n* (prøv !).
Her kan vi ta i bruk *grafiske* hjelpemidler som fins i MatLab eller TI-89

Vi kan f.eks kalle venstre siden av likningen $y_V(n)$ og høyresiden $y_H(n)$. Vi plotter disse funksjonene i samme diagram med *n* som uavhengig variabel (*x*-akse). Skjæringen mellom kurvene vil gi oss løsningen. Se neste side.

Framgangsmåte i MatLab:

```
» K=8e5; r=0.08; a=7087.46;
» n=linspace(0,20,200);
» yv=(12*a/r)*((1+r/12).^(12*n)-1);
» yh=K*(1+r).^n;
» plot(n,yv)
» hold on
» plot(n,yh)
» grid
```

Dette gir følgende plott:



Vi ser at vi får skjæring ved ca. $n \approx 16$ år.
Vi kan få mer nøyaktig svar ved å blåse opp diagrammet til full skjerm og deretter bruke MatLab-kommandoen **ginput**. Dette gjøres ved f.eks å skrive:

```
» [Tid,Y]=ginput
```

Kursoren blir nå forandret til et trådkors i diagrammet. Dette plasseres over skjæringspunktet og deretter trykkes på venstre musetast (kun en gang !) Så trykkes ENTER på tastaturet.
Vi får følgende respons:

```
Tid =
   15.8986

Y =
  2.7105e+006
```

Y er uinteressant i denne sammenheng. Vi ser at nedbetalingstiden blir ca. 15,9 år