Høgskolen i Sør-Trøndelag
Avdeling for Teknologi
Program for Elektro- og Datateknikk

HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

GO326A Matematikk 2F

Øving 2 – 2004

Løsning av differensiallikningssystemer i Matlab.

Her har vi 2 måter å gå fram på. Vi skal ta utgangspunkt i følgende oppgave:

$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$$

$$\text{hvor } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette kan skrives:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \qquad x_1(0) = 2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 \qquad x_2(0) = 0$$

a) *Symbolsk løsning (matematisk løsning)*

Dersom vi er interessert i formlene for $x_1(t)$ og $x_2(t)$ (f.eks. for videre analyse) kan vi bruke den *symbolske diff.likningsløseren* ***dsolve***:

```
» [x1,x2]=dsolve('Dx1=x2','Dx2=-2*x1-3*x2','x1(0)=2','x2(0)=0')
x1 =
-2*exp(-2*t)+4*exp(-t)
```

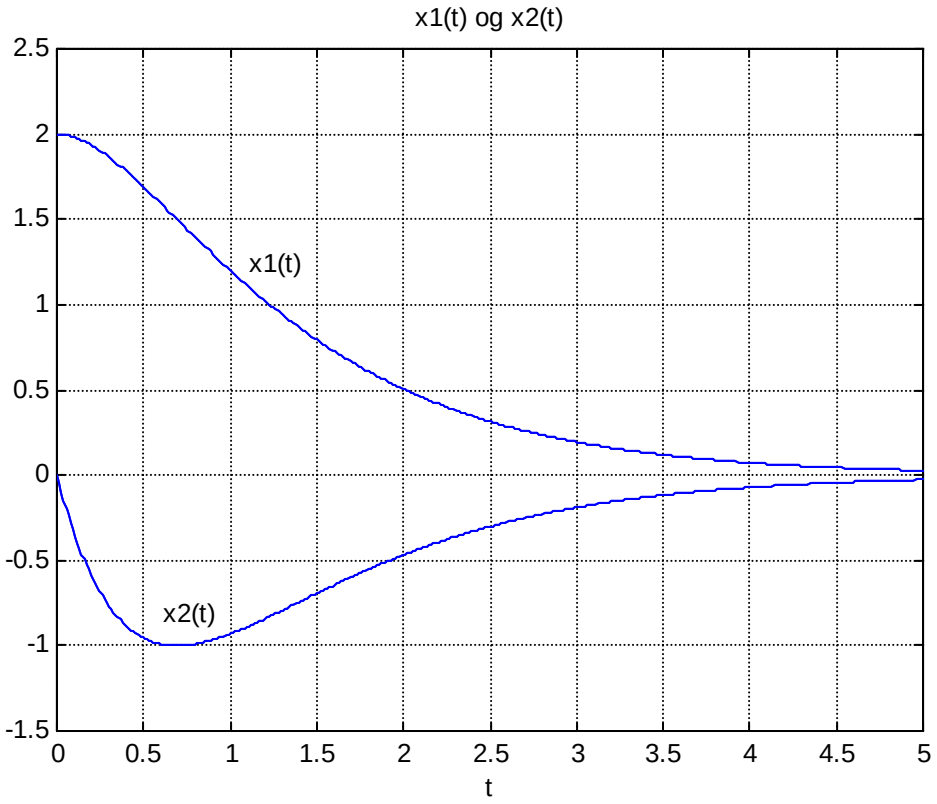
```
x2 =
-4*exp(-t)+4*exp(-2*t)
```

Symbolske funksjoner kan også plottes vha. **ezplot**:

```
» ezplot(x1,[0 5])
» hold on
» ezplot(x2,[0 5])
» axis([0 5 -1.5 2.5])
» grid
```

Diagrammene kan også tekstes i Matlab og deretter overføres til Word-dokumenter (som her) vha. klipp og lim:

```
» title('x1(t) og x2(t)')
» gtext('x1(t)')
» gtext('x2(t)')
```



b) *Numerisk løsning (simulering)*

Ofte er man bare interessert i å se på løsningen for å gjøre en rask vurdering. Det vanlige er da å kjøre et *simuleringsprogram* hvor differensiallikningen ikke blir analytisk løst, men hvor programmet vha. forskjellige numeriske metoder regner seg fra start-tilstanden til neste tilstand, til neste osv. For større systemer er nok dette fortsatt det raskeste selv om det her blir å skyte spurv med kanoner.

Det finnes mange simuleringsprogram innebygd i Matlab. Det som kanskje passer best til dette formål er **initial** som simulerer *udrevne systemer* dvs. homogene diff.likninger som vi har her. Utgangspunktet er følgende likninger:

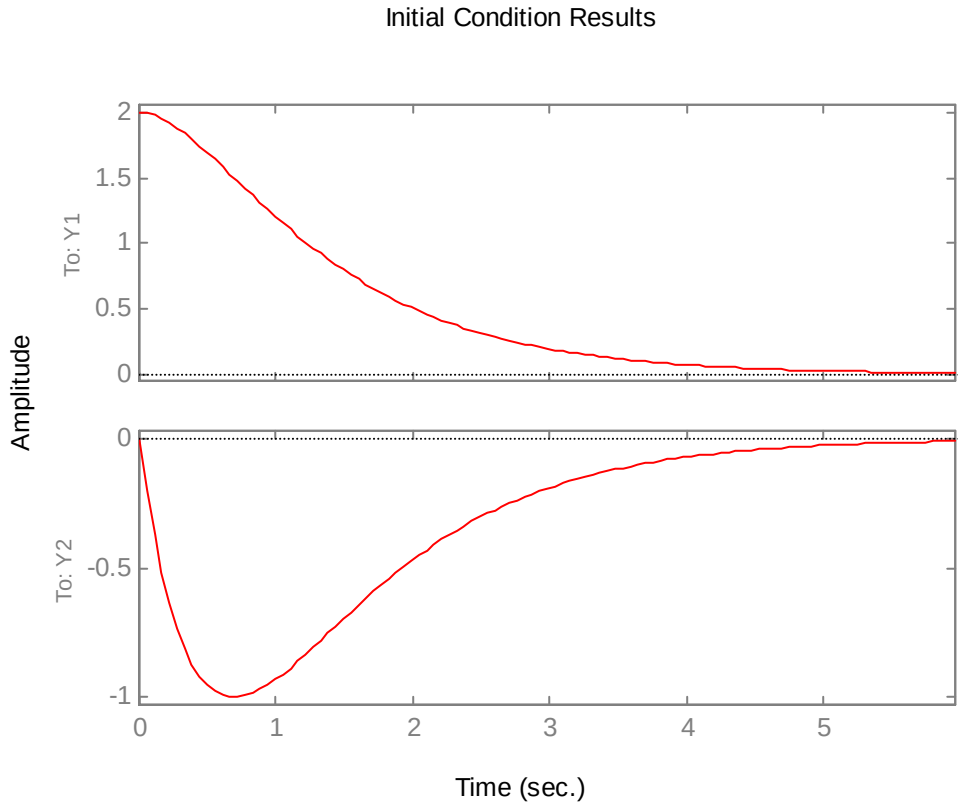
$$\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + Bu \quad \text{og} \quad \underline{y} = D\underline{x} + Eu$$

Hvor vi har :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

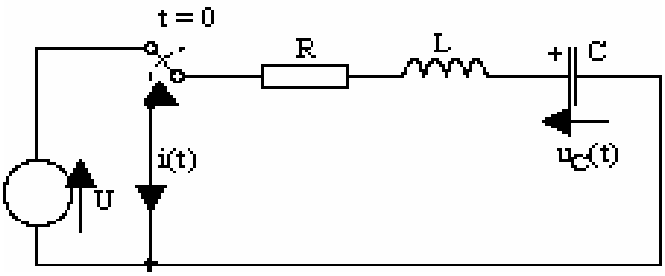
Likningene må presses inn i den rette støpeformen gitt ovenfor. De forteller bare at både $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er uavhengig av u og dessuten at $\underline{x} = \underline{y}$. I Matlab får vi følgende oppsett (se neste side):

```
» A=[0 1;-2 -3];
» B=[0;0];
» D=eye(2);
» E=[0 0]';
» sys=ss(A,B,D,E);
» x0=[2 0]';
» initial(sys,x0)
```



Det kan virke som om den første metoden var langt å foretrekke. Men forestill dere hvordan det ville vært f.eks. for et 5.ordens system med flere drivfunksjoner, eller et system hvor drivfunksjonene foreligger som data men ikke som matematisk funksjon. Som hovedregel kan vi si at jo større og mer komplisert system, dess mer kommer de numeriske metodene til sin rett.

NB I denne øvingen som er en frivillig skoleøving, bør dere konsentrere dere om oppgave 2 (på neste side) gruppevis på datasalen, og deretter se på oppgave 1 på egen hånd.



Oppgave 1

Figuren over viser en RLC-krets som drives av en likespenning. Ved tiden t = 0 har venderen stått lenge i det øverste stillet, slik at kretsen er i stabil tilstand. Så legges venderen over, slik at kondensatoren lades ut. Verdiene som skal benyttes er:

U = 10,0 V, R = 100 Ω, L = 1,00 mH, C = 2,00 μF.

Et ligningssett som beskriver denne situasjonen kan settes opp fra Kirchoffs spenningslov og

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{dt}}$$

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$$

uttrykkene for spenningen over en spole og strømmen i en kondensator:

$$\dot{u}_C = \frac{1}{C}\, i$$

$$\dot{i} = -\frac{1}{L}u_C - \frac{R}{L}i$$

Satt sammen og ordnet blir dette:

$$\dot{u}_C = 500 * 10^3\, i \qquad (1)$$

$$\dot{i} = -1000\, u_C - 100 * 10^3\, i \qquad (2)$$

Når vi setter inn de oppgitte verdiene får vi:

a) Løs ligningssystemet og angi strøm og spenning som funksjon av tiden.
(Startbetingelser: $u_C(0) = 10$ V, $i(0) = 0$ A.)

b) Gjente a), men nå med R = 10,0 Ω.
Obs! Med denne verdien på R blir egenverdiene kompleks konjungerte.

Tips: *Vanskeligheten med diff.likningene (1) og (2) er at* i *inngår i diff.likningen for* u_C *, mens* u_C *inngår i diff. likningen for* i. *Et alternativ kan være å derivere hele likning (2) og deretter sette inn for* du_C/dt *fra likning (1). Dette skulle resultere i en 2. ordens diff.likning for* i. *Denne løses på vanlig måte. Når* i*(t) er funnet kan denne deriveres og settes inn i likn. (2) som deretter løses for* u_C *. (Eller man kan sette uttrykket for* i *inn i likning (1) som deretter integreres) Vi skal senere lære mer systematiske og slagkraftige løsningsmetoder.*

Oppgave 2

Løs oppgave 1 v.h.a. Matlab. Forsøk både symbolsk og numerisk løsning. Det skal tas ut kurver der dette er naturlig. Skriv en kort besvarelse i Word eller WP, med kopier av diagrammene. Ta utskrift. Oppgaven skal *ikke* innleveres