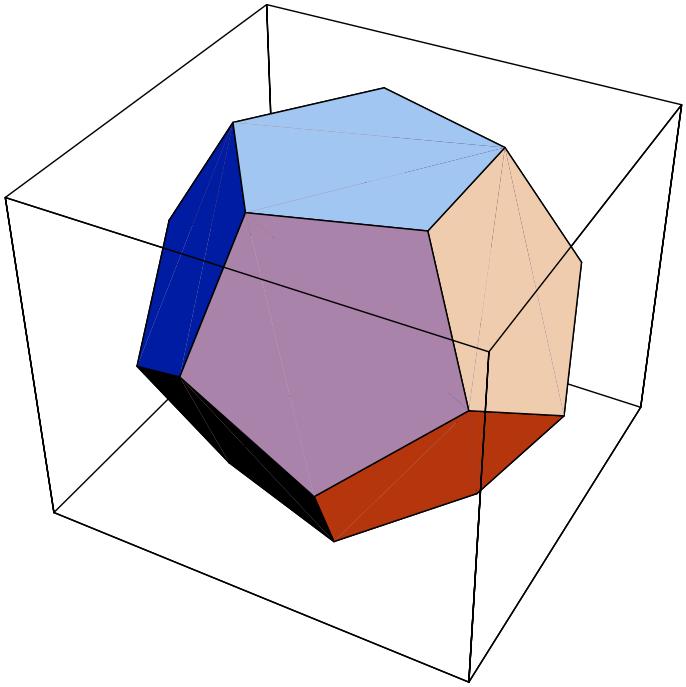


Matematikk og videregående skole

Lineær algebra og optimering– matematikk med anvendelser

Geir Dahl,
Matematisk institutt og Inst. for informatikk
Universitetet i Oslo





Matematikk og videregående skole

HVA SKJER? Noen stikkord:

- transport
- matrise
- lineær algebra
- lineær optimering
- simpleksalgoritmen
- elementære radoperasjoner
- geometri
- polyeder
- Nobel pris
- anvendelser
- kombinatorisk problem
- tilordningsproblemet
- den ungarske algoritmen
- trafikkmodell



Transportproblemet

En enkel matematisk modell for å finne optimal transportplan.

Har:

- visse lagre
- visse kunder
- kjenner antall varer på hvert lager
- vet hvor mye hver kunde har bestilt
- transportkostnader

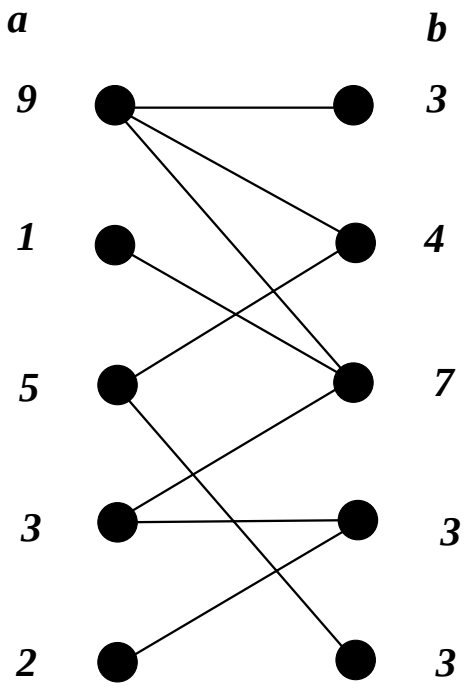
Finn en transportplan, dvs. hvor mye som skal fraktes fra hvert lager til hver kunde, slik at

- etterspørsel dekkes og lagerkapasiteter overholdes, og
- slik at den totale transportkostnad er minst mulig.



Transportproblemet

Eksempel:

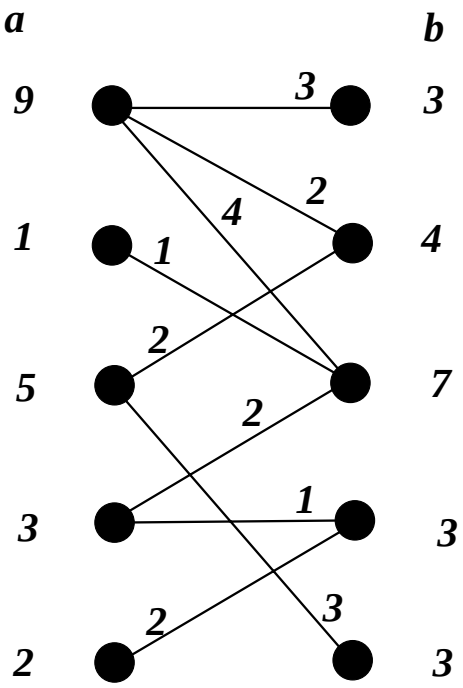


Kan du finne en mulig løsning?



Transportproblemet

En mulig løsning:



Matrise:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Kommentar: *lineær algebra = studiet av problemer som har med matriser å gjøre.*



Transportproblemet

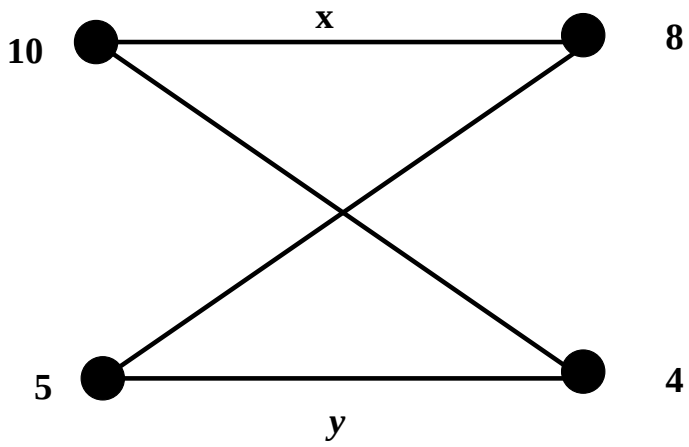
- Dette er et problem med MANGE løsninger.
- Derfor kan vi velge en løsning som er “best mulig”.
- Ser på transportkostnadene.
- Finn en løsning som har lavest mulig transportkostnad!

Noen viktige spørsmål:

- Kan vi finne ALLE løsningene?
- Kan vi finne en OPTIMAL løsning?
- Hvordan? Mye regning? Datamaskin?

Problemet over er et lineært optimeringsproblem.

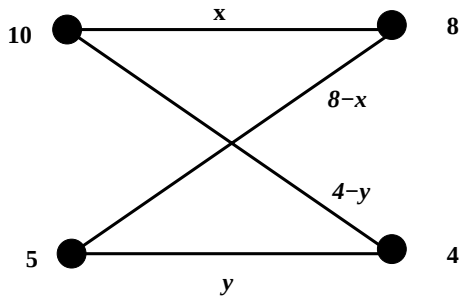
Et lite eksempel:



Kan du finne matematisk modell?

Hvor mye går langs de to siste linjene for at etterspørselen skal dekkes?

Transportproblemet

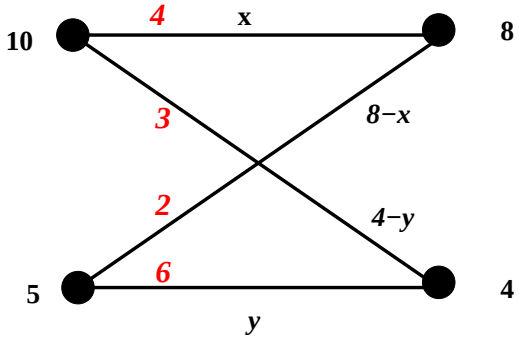


Krav:

Lager 1: $x + (4 - y) \leq 10$ dvs. $x - y \leq 6$

Lager 2: $(8 - x) + y \leq 5$ dvs. $x - y \geq 3$

Dessuten: $0 \leq x \leq 8$ og $0 \leq y \leq 4$. Hvorfor?



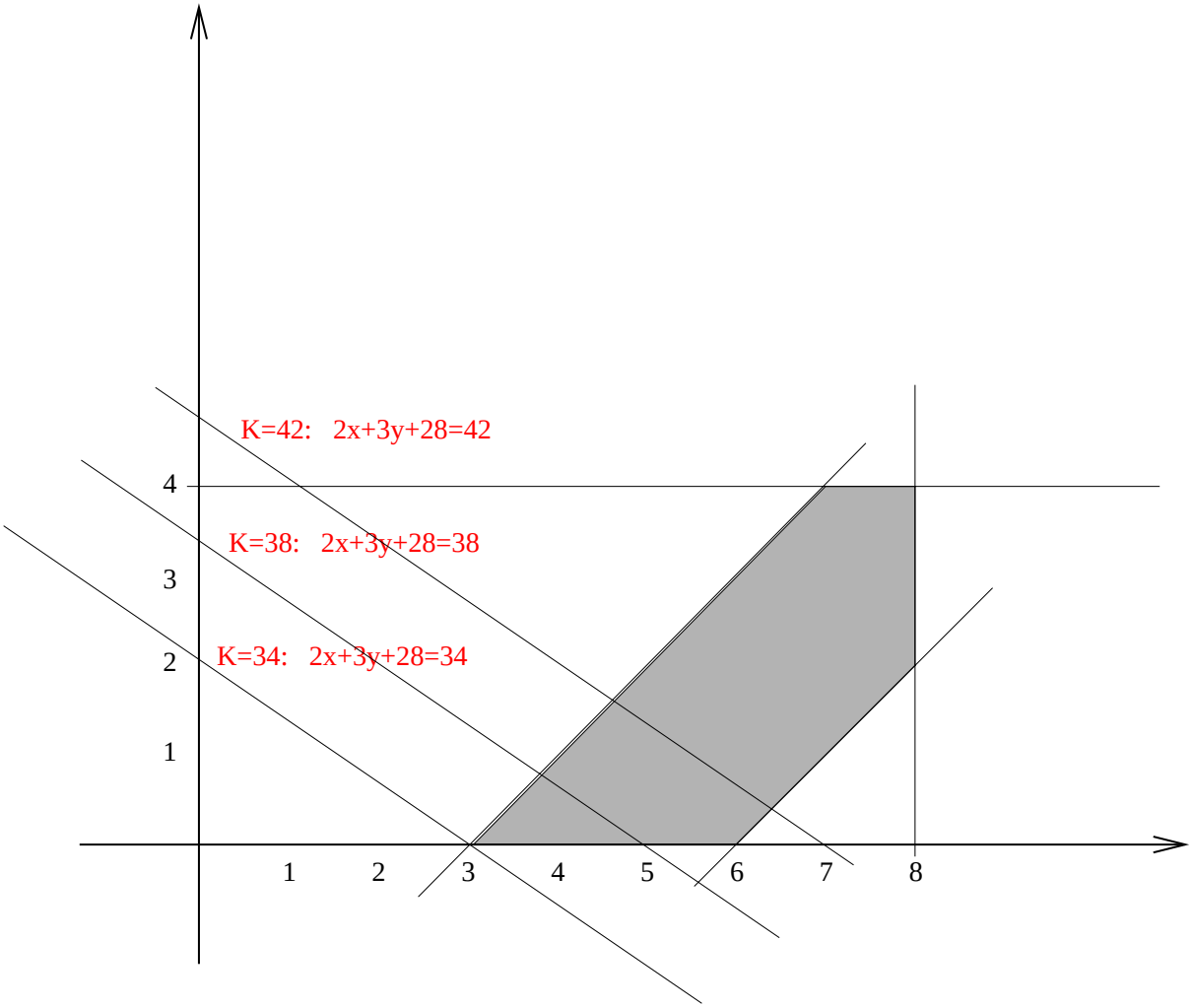
Røde tall: kostnad pr. enhet

Transportkostnad:

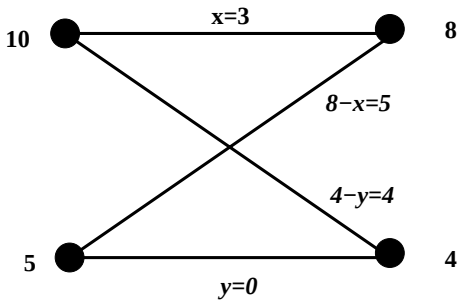
$$K = 4x + 3(4 - y) + 2(8 - x) + 6y = 2x + 3y + 28$$

.... som vi vil minimere!

Transportproblemet



Optimal løsning: $x = 3$, $y = 0$.





Transportproblemet

Det generelle transportproblemet ser slik ut med matematisk notasjon:

minimer $\sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j}$

forutsatt at

(i) $\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i \quad (i \leq m)$

(ii) $\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j \quad (j \leq n)$

(iii) $x_{i,j} \geq 0 \qquad (i \leq m, j \leq n).$

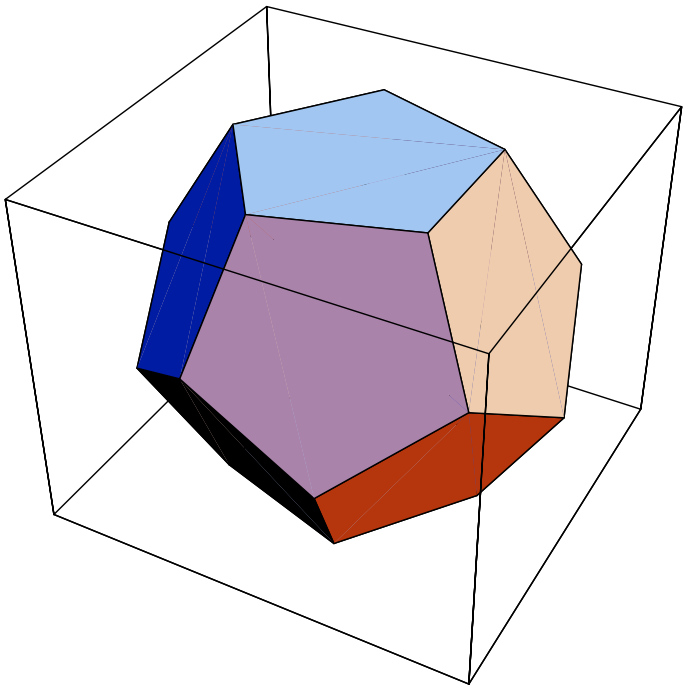
En løsning x her kan vi oppfatte som en $m \times n$ matrise. Og vi ønsker en optimal løsning, dvs. med lavest mulig verdi på $\sum_{i,j} c_{i,j} x_{i,j}$.

Det finnes effektive algoritmer som løser slike problemer svært raskt på datamaskin.

Løsningsmengde

Løsningsmengden i transportproblemet (og i lineær optimering generelt) er en type geometrisk objekt som kalles et polyeder.

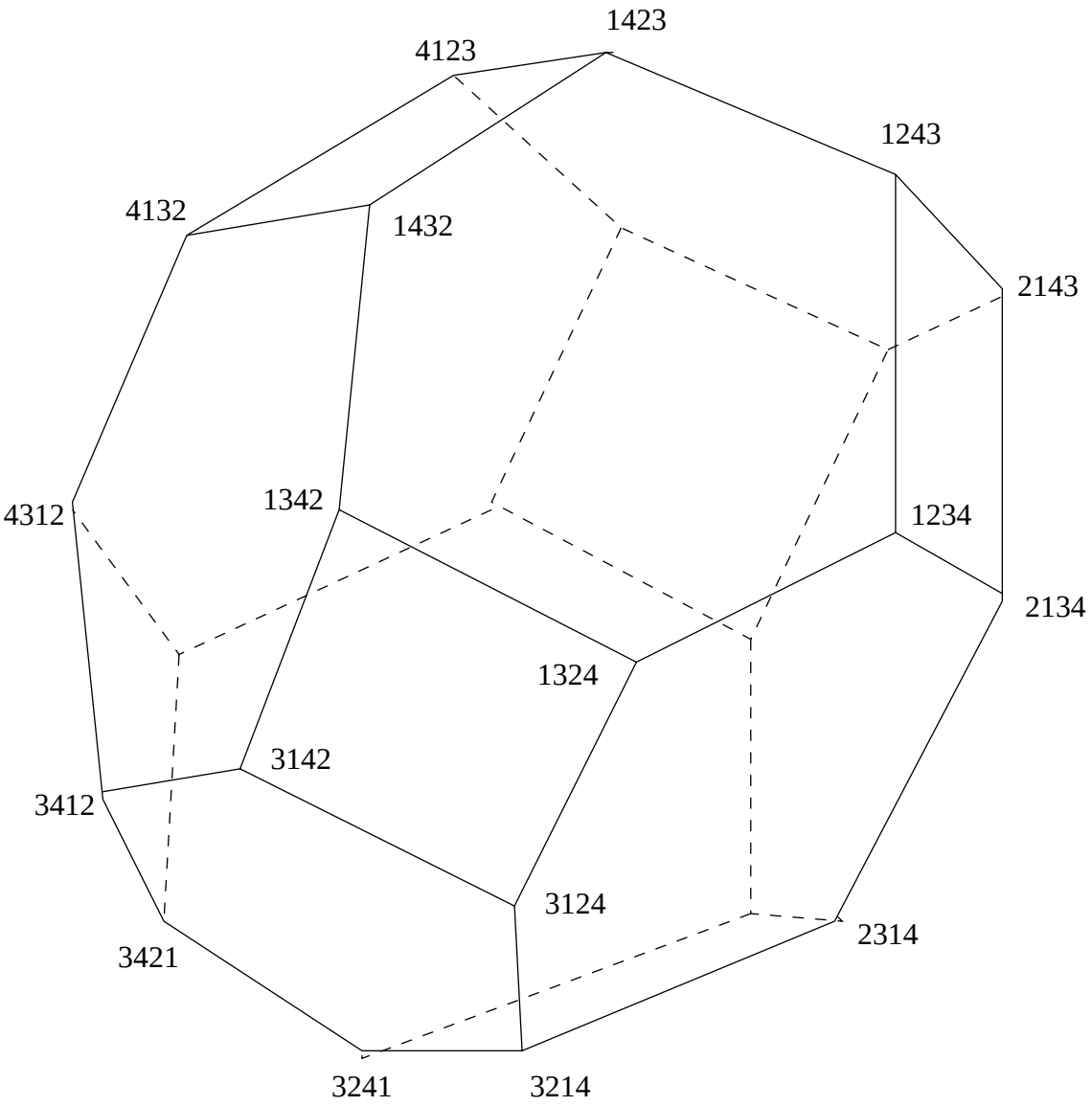
Her er et 3 dimensjonalt polyeder (3 variable i LP) som kalles et dodekaeder:



Forresten: Euler's polyederformel: $v - e + f = 2$

- $v = 20$ ektrempunkter (hjørner)
- $e = 30$ kanter
- $f = 12$ fasetter

Permutaeder





Lineær optimering, anvendelser:

- trafikkmodeller
- telekommunikasjon
- planlegging av produksjon, lagerstyring
- aksjeportefølje, investeringer



Simpleksalgoritmen

Skal se hvordan man kan løse lineære optimeringsmetoder generelt.

For mer enn to variable trenger vi en algebraisk metode. Bruker lineær algebra.

En vektor som oppfyller alle begrensningene kalles en **tillatt løsning**.

Funksjonen vil ønsker å maksimere kalles **objektivfunksjonen**.

Simpleksalgoritmen: metode for å løse alle LP problemer.

Metoden ble utviklet av George B. Dantzig rundt 1947 i forbindelse med transportproblemer i U.S. Air Force. Arbeidet ble publisert i 1951.



Simpleksalgoritmen, eksempel

Andre tidlige bidragsytere var T.J.Koopmans og L.V.Kantorovich, og disse to fikk Nobel prisen i økonomi for dette arbeidet i 1975.

Eksempel: Vil løse

$$\text{maksimer} \quad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

forutsatt at

$$\text{(i)} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$

$$\text{(ii)} \quad 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11$$

$$\text{(iii)} \quad 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Konverterer til **likninger** ved å innføre **slakkvariable** for hver $\leq$-ulikhet: f.eks. erstattes (i) av

$$w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad \text{og } w_1 \geq 0.$$



Simpleksalgoritmen, eksempel

Får da problemet på **basislisteform** (*dictionary*):

$$\begin{aligned}
&\text{maksimer} \quad \eta = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
&\text{forutsatt at} \\
&\text{(i)} \quad w_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
&\text{(ii)} \quad w_2 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
&\text{(iii)} \quad w_3 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Venstre side: avhengige variable = **basisvariable**.

Høyre side: uavhengige variable = **ikkebasisvariable**.

Startløsning: Lar $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ og dermed får vi $w_1 = 5, w_2 = 11, w_3 = 8$.

Vi lar alltid ikkebasisvariable være 0. Basisvariablene blir bestemt entydig, nemlig lik konstantene på høyre side.



Simpleksalgoritmen, eksempel

Har vi optimal løsning?

Nei!!

Vi kan f.eks. øke x_1 mens vi fortsatt lar $x_2 = x_3 = 0$. Da vil

- η øke
- vi får nye verdier på basisvariablene som blir bestemt fra x_1
- jo mer vi øker x_1 jo mer øker η!
- men pass på: w_j-ene nærmer seg null!

Maksimal økning av x_1: vil unngå at basisvariable blir negative. Fra $w_1 = 5 - 2x_1$, $w_2 = 11 - 4x_1$ og $w_3 = 8 - 3x_1$ får vi at $x_1 \leq 5/2,\ x_1 \leq 11/4,\ x_1 \leq 8/3$ så vi kan øke x_1 til den minste verdien, nemlig $5/2$.

Dette gir den nye løsningen $x_1 = 5/2$, $x_2 = x_3 = 0$ og dermed $w_1 = 0, w_2 = 1, w_3 = 1/2$. Og nå er $\eta = 25/2$. Altså: **en mye bedre løsning**!!

Hvordan komme videre? Basislisteform er fin for å teste optimalitet, så vi vil komme over i neste basisliste!



Simpleksalgoritmen, eksempel

Vi ønsker at x_1 og w_1 skal "bytte side". Altså: x_1 skal gå **inn** i basis, mens w_1 går **ut** av basis. Dette kan gjøres ved å bruke w_1-likningen til å eliminere x_1 fra alle andre likninger.

Ekvivalent: bruker **elementære radoperasjoner** på systemet for å eliminere x_1:

(i) løser for x_1: $x_1 = 5/2 - (1/2)w_1 - (3/2)x_2 - (1/2)x_3$, og (ii) adderer passende multippel av denne likningen til de andre slik at x_1 forsvinner og erstattes av ledd med w_1.

Husk: elementære radoperasjoner endrer ikke løsningsmengden.

Resultat:

$$
\begin{aligned}
\eta &= 12.5 - 2.5w_1 - 3.5x_2 + 0.5x_3 \\
\hline
x_1 &= 2.5 - 0.5w_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 \\
w_2 &= 1 + 2w_1 + 5x_2 \\
w_3 &= 0.5 + 1.5w_1 + 0.5x_2 - 0.5x_3
\end{aligned}
$$

Vi har nå gjennomført en **pivotering**: bruk av elem. radoperasjoner for å bytte to variable (en inn og en ut av basis).



Simpleksalgoritmen, eksempel

Gjentar prosessen!

Optimal? Nei: kan øke η ved å øke x_3 fra null! Kan øke til $x_3 = 1$ for da blir $w_3 = 0$ (mens de andre basisvariablene er ikkenegative).

Gjennomfører en ny pivotering: x_3 inn i basis, og w_3 ut av basis. Får den nye basislisten:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\eta & = 13 & - & w_1 & - & 3x_2 & - & w_3 \\
\hline
x_1 & = 2 & - & 2w_1 & - & 2x_2 & + & w_3 \\
w_2 & = 1 & + & 2w_1 & + & 5x_2 & & \\
x_3 & = 1 & + & 3w_1 & + & x_2 & - & 2w_3
\end{array}
$$

Her ser vi at alle koeffisientene foran ikkebasisvariable er ikkepositive (faktisk negative) i likningen for η. Da vil enhver økning av en eller flere ikkebasisvariable gi en løsning med $\eta \leq 13$. Men enhver tillatt løsning kan finnes ved passende verdier på ikkebasisvariablene! Hvorfor?

Konklusjon: vi har funnet en **optimal løsning**! Den er $w_1 = x_2 = w_3 = 0$ og $x_1 = 2, w_2 = 1, x_3 = 1$. Verdien på η er da 13, og dette kalles **optimal verdi**.



Hvilke firma bør vi velge?

- Vi skal sette igang 18 ulike byggeprosjekter
- 18 firmaer gir anbud på hvert byggeprosjekt
- hvert firma kan bare ta på seg ett prosjekt (fordi det er store prosjekt)

Prosjekt

	1	2	3														17	18
F1:	5	6	3	5	2	4	5	6	4	5	6	3	5	2	3	5	2	4
F2:	8	2	3	8	6	4	5	6	4	8	2	3	8	6	4	5	6	3
F3:	5	4	3	5	2	3	8	2	4	8	6	4	5	6	3	8	6	4
	8	2	4	5	6	3	5	6	4	5	2	3	8	2	4	8	6	4
	5	6	3	8	2	3	8	2	4	5	6	4	8	6	3	5	2	3
	8	2	4	8	2	4	5	6	3	5	2	3	5	2	4	5	2	4
	5	5	3	8	2	3	8	2	4	5	2	4	5	6	3	8	6	3
	8	6	4	5	2	4	5	2	3	8	6	3	8	2	4	5	2	4
	5	6	3	5	2	3	8	2	4	5	6	3	8	6	3	5	2	4
	4	2	3	8	2	3	5	6	4	5	2	3	5	2	3	8	6	4
	5	3	4	5	3	4	6	6	3	8	2	3	8	6	4	8	2	4
	9	2	3	5	2	3	5	2	4	8	2	4	5	6	3	8	6	3
	5	8	4	5	4	3	4	5	3	8	2	3	8	2	4	5	6	3
	9	6	7	8	2	3	5	2	3	8	2	3	5	2	4	5	6	3
	8	3	4	5	6	4	7	4	3	5	6	5	8	6	3	8	2	4
	4	2	3	5	6	3	8	2	4	5	2	3	5	6	3	8	5	4
F17:	8	2	6	5	2	3	5	2	4	5	6	3	8	2	4	5	2	3
F18:	8	6	3	5	2	4	5	2	3	5	2	3	5	2	3	5	2	4



Tilordningsproblemet

Tabell (matrise): størrelse 4×4

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

Vi kan ha tabeller av ulike størrelser, 5×5 eller 6×6 osv. ($n \times n$)

Vannrett linje i tabellen:

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

Loddrett linje i tabellen:

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115



Tilordningsproblemet

Tilordning: et utvalg med nøyaktig ett tall fra hver vannrett linje og fra hver loddrett linje.

Hvilke er tilordninger?

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

Den første tilordningen har sum:
$75 + 85 + 105 + 45 = 310$.

Oppgave:

- *finn noen andre tilordninger*
- *regn ut summen for hver tilordning*
- *hvor mange tall er det i en tilordning?*



Tilordningsproblemet

Tilordningsproblemet: finn en tilordning med lavest mulig sum.

Spørsmål: hvordan løse tilordningsproblemet?

Direkte metode: finn først alle tilordninger og regn ut summen for hver. Velg en med lavest sum!

Dette går greit for små tabeller, men blir håpløst for større tabeller. F.eks. for en 7×7 tabell er det 5040 ulike tilordninger.

En bedre metode kommer nå!



Tilordningsproblemet

Prinsipp: gjør en rekke "linjeforenklinger" inntil løsningen er opplagt! Poenget er altså å forenkle problemet.

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

15	0	0	5
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

Linjeforenkling: trekk fra samme tall (her : 75) overalt i en linje. Når vi trekker fra det minste tallet i linjen dukker det opp nuller.

MERK: en linjeforenkling betyr at alle tilordninger får en lavere sum (her:75), men rekkefølgen på tilordningene (basert på summen) er den samme!!!!

15	0	0	5
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

15	0	0	5
0	50	20	30
125	95	90	105
45	110	95	115

Vi fortsetter og linjeforenkler også i de to siste vannrette linjene. Resultat:



15	0	0	5
0	50	20	30
35	5	0	15
0	65	50	70

Har nå minst en null i hver vannrette linje.

Fortsettelse: linjeforenkler i hver loddrette linje. Har allerede nuller i de tre første, men må fikse den siste linjen ved å trekke fra 5. Får:

15	0	0	0
0	50	20	25
35	5	0	10
0	65	50	65

En god idé: Hvis vi klarer å finne en tilordning med bare nuller, så har vi løst problemet! Hvorfor?

Men: det fins ingen tilordning med bare nuller.

Synd! Men nå skal vi fortsette med linjeforenklinger inntil det fins en tilordning med bare nuller!!!!



Tilordningsproblemet

1. Dekk over alle nullene med færrest mulig linjer!

Vi klarer dette med tre linjer som vi kaller “blå linjer”:

15	0	0	0
0	50	20	25
35	5	0	10
0	65	50	65

2. Finn det minste tallet som ikke er dekket! Det er 20.
3. Trekk 20 fra alle udekkede tall (svarte tall over).
4. Legg 20 til alle tall som ligger i “kryssene” (de tallene som dekkes både av en vannrett og en loddrett linje, her er det 15 og 35).

Resultat:

35	0	0	0
0	30	0	5
55	5	0	10
0	45	30	45



Forklaring: Det vi gjør i skritt 2 og 3 er det samme som

3'. trekke 20 fra hver hver vannrett linje som ikke er ensfarvet blå, og

4'. legge 20 til hver dekket loddrett linje som er ensfarvet blå.

Altså: vi har igjen bare brukt linjeforenkling.

Hvordan fortsetter vi nå?

Svar: Vi gjentar skrittene 1 – 4 foran:

DEKK-FINN-TREKK-LEGG!

1. DEKK: Tre blå linjer nok en gang.

35	0	0	0
0	30	0	5
55	5	0	10
0	45	30	45

2. FINN: minste udekkede tall er 5.



3 og 4. TREKK og LEGG: Resultatet blir

40	0	5	0
0	25	0	0
55	0	0	5
0	40	30	40

Etter dette starter vi på enda en ny DEKK-FINN-TREKK-LEGG-runde. Men nå ser vi at det må 4 linjer til for å dekke alle nullene! Da kan vi stoppe, for nå fins en tilordning med bare nuller. Den er da (optimal) løsning!

40	0	5	0
0	25	0	0
55	0	0	5
0	40	30	40

Finner derfor løsningen (i opprinnelig tabell)

90	75	75	80
35	85	55	65
125	95	90	105
45	110	95	115

og summen er 275. (Kan dere finne en annen optimal tilordning?)



Nobelpris!

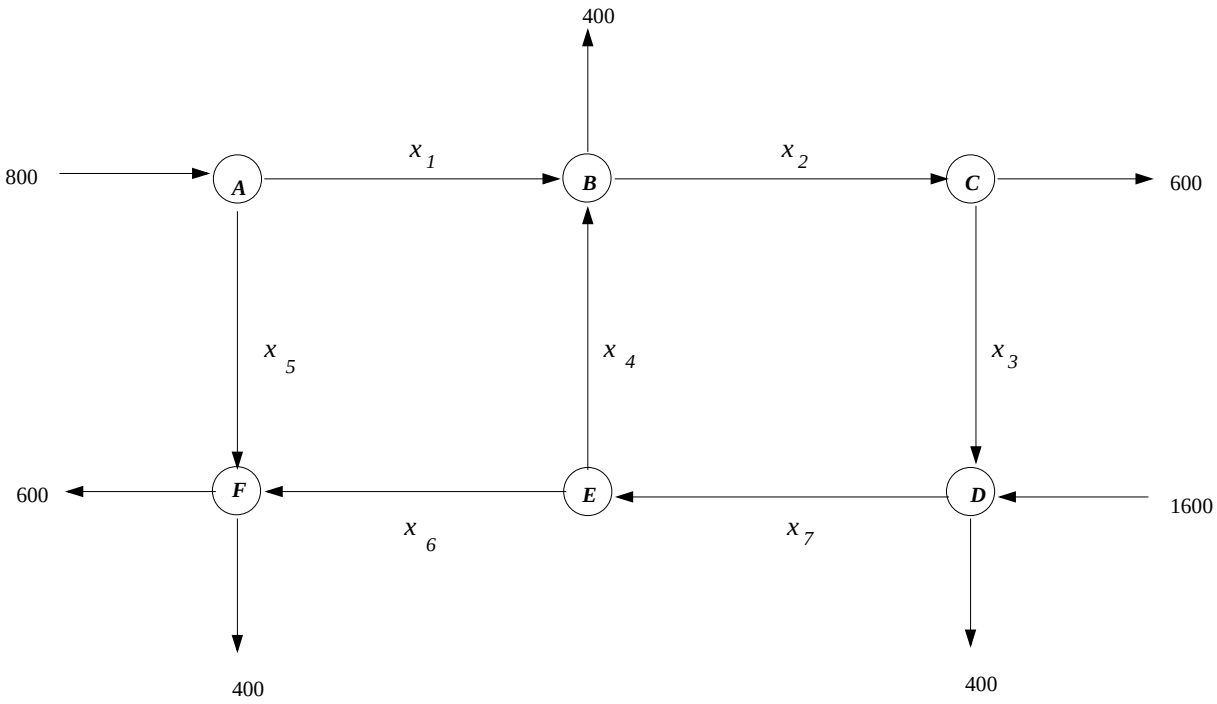
Dere har lært den ungarske tilordningsalgoritmen!

Denne kan programmeres på datamaskin og (med litt endringer) er en av de raskeste måtene å løse tilordningsproblemet på. Mye brukt!

Tilordningsproblemet er et eksempel på et optimeringsproblem. Verden er full av optimeringsproblemer!

Slike problemer er bl.a. viktige i økonomi. Nobel prisen i økonomi har blitt gitt til arbeid med optimeringsproblemer som minner om transportproblemet (T.J.Koopmans og L.V.Kantorovich, 1975). H. Markowitz fikk Nobel prisen i økonomi i 1990 for sitt arbeid med porteføljeoptimering (finn beste sammensetning av aksjer).

Strøm i nettverk (f.eks. veinettverk, telenett, elektrisitetsnett, olje/gassnettverk)



Balanse: *total strøm inn til et kryss = total strøm ut*

$$
\begin{aligned}
800 &= x_1 + x_5 && \text{(node A)} \\
x_1 + x_4 &= 400 + x_2 && \text{(node B)} \\
x_2 &= 600 + x_3 && \text{(node C)} \\
1600 + x_3 &= 400 + x_7 && \text{(node D)} \\
x_7 &= x_4 + x_6 && \text{(node E)} \\
x_5 + x_6 &= 1000 && \text{(node F)}
\end{aligned}
$$

- kan få store lineære likningssystemer i slike modeller
- vil ha $x \geq 0$



Avsluttende kommentarer

- matematiske problemer er viktige !
- kombinere matematikk, informatikk og andre fag
- studieprogram “MATEMATIKK, INFORMATIKK OG TEKNOLOGI” ved Universitetet i Oslo
- svært gode jobbmuligheter
- velg full fordypning i matematikk på videregående



Avsluttende kommentarer

- studieprogram “MATEMATIKK, INFORMATIKK OG TEKNOLOGI” http://www.uio.no/studier/program/mit/
- Matematisk institutt, UiO: http://www.math.uio.no/
- CMA: Centre of Mathematics for Applications http://www.cma.uio.no/
- Institutt for Informatikk, UiO: http://www.ifi.uio.no/
- Geir Dahl, telefon 22 85 58 35, Webside: http://www.ifi.uio.no/~geird/

  (Inneholder div. informasjon om optimering, forskning, studier, Web optimering. Også dette foredraget.)