Matematisk modellering – med vekt på lineær algebra

Geir Dahl
Matematisk institutt, CMA

March 19, 2007

Plan

Tirsdag 20.mars.:

- 8.30-10 Teori: Lineære likningssystemer
- 10-12.30 *Oppgaveregning* + Diskusjon
- 12.30 Lunsj
- 13.15-14.30 Teori: Lineær optimering
- 14-16 *Oppgaveregning* + Diskusjon

Mandag 26.mars:

- 8.30-10 Teori: Regresjon
- 10-12.30 *Oppgaveregning* + Diskusjon
- 12.30 Lunsj
- 13.15-14 Teori: Vekstmodeller
- 14-15.30 *Oppgaveregning* + Diskusjon

Lineære likningssystemer: Hovedpunkter

- hva er lineære likninger
- finne løsning: eliminasjon
- alternativ metode: matrisemetoden
- teoretiske resultater

Hva er lineære likninger (LL)?

$$\begin{aligned} 2x &+ 3y &&= 4 \\ 4x &- 8y &&= -6 \end{aligned}$$

- hva: tall ganget med variabel, og sum av slike ledd
- variable=ukjente
- 2×2, 3×5, ... $m \times n$
- hva med ulineære likninger?
- hvor dukker slike problemer opp?

Hva er lineære likninger (LL)?

$$\begin{aligned} 2x &+ 3y &&= 4 \\ 4x &- 8y &&= -6 \end{aligned}$$

- hva: tall ganget med variabel, og sum av slike ledd
- variable=ukjente
- 2×2, 3×5, ... $m \times n$
- hva med ulineære likninger?
- hvor dukker slike problemer opp?
- OVERALT: moderne beregninger i teknikk, strømningsproblemer (gass/olje), lyd- og billedbehandling, økonomi, klima/vær modeller
- systemer med avhengigheter mellom komponenter

Hvordan løse LL?

Eliminasjonsmetoden:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 4 \\ 4x & - & 8y & = & -6 \end{array}$$

1. Ved å skrive om første likning får vi $x = 2 - (3/2)y$. Dette uttrykker x entydig ut fra y (vi sier at x er en *funksjon* av y).
2. Så erstatter vi x i den andre likningen med det uttrykket vi nettopp fant, og får $4(2 - (3/2)y) - 8y = -6$.
3. Den siste likningen har bare én ukjent, og vi finner løsningen $y = 1$. Dermed finner vi også x ut fra vår omskrivning av første likning: $x = 2 - (3/2) \cdot 1 = 1/2$. Så, løsningen av likningssystemet er $x = 1/2,\ y = 1$.

Sentrale spørsmål for LL

- har systemet (minst) en løsning?
- er det en unik løsning?
- hvordan finne én evt. alle løsningene?

Alle kan besvares ved (Gauss) eliminasjon!

(Carl F. Gauss (1777–1855))

Eks: rette linjer i planet

- finn en rett linje (i planet) som går gjennom punktene $(1, 2)$ og $(5, 3)$.
- linjen $l : y = ax + b$
- krav: $a \cdot 1 + b = 2$, og $a \cdot 5 + b = 3$
- så: 2×2 lineært likningssystem

Eks: rette linjer i planet

- finn en rett linje (i planet) som går gjennom punktene $(1, 2)$ og $(5, 3)$.
- linjen $l : y = ax + b$
- krav: $a \cdot 1 + b = 2$, og $a \cdot 5 + b = 3$
- så: 2×2 lineært likningssystem

Generelt:

- finn linje som går gjennom punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) (der $x_1 \neq x_2$)
- får igjen 2×2 lineært likningssystem
- løser og finner linjen

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Eks: plan i rommet

- plan: beskrives ved likningen $ax + by + cz = 1$
- så 1×3 LL
- problem: gitt punkter $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ og $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$, finn plan gjennom disse
- får 3×3 LL

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 + cz_1 &= 1 \\ ax_2 + by_2 + cz_2 &= 1 \\ ax_3 + by_3 + cz_3 &= 1 \end{aligned}$$

- NB: her er variablene a, b og c
- tilsvarende gjelder i høyeredimensjonale rom (n variable)

Form på LL

- LL 3×3 system: variable x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &+ a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &+ a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 &+ a_{32}x_2 &+ a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- gitt: $a_{11}, a_{12}, \ldots$: koeffisienter, og høyreside b_1, b_2, b_3
- a_{ij}: første indeks i angir rad, andre kolonne

Form på LL

- LL 3×3 system: variable x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &+ a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &+ a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 &+ a_{32}x_2 &+ a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

- gitt: $a_{11}, a_{12}, \ldots$: koeffisienter, og høyreside b_1, b_2, b_3
- a_{ij}: første indeks i angir rad, andre kolonne
- LL $m \times n$ system: variable $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 &+ \cdots &+ a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 &+ \cdots &+ a_{2n}x_n &= b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 &+ \cdots &+ a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Gauss, del I: Foroverelimination

- Løs likning 1 mhp. x_1, dvs. finn x_1 uttrykt ved de øvrige variablene. Bruk dette uttrykket til å eliminere x_1 i likning 2, likning 3 osv.

Gauss, del I: Foroverelimination

- Løs likning 1 mhp. x_1, dvs. finn x_1 uttrykt ved de øvrige variablene. Bruk dette uttrykket til å eliminere x_1 i likning 2, likning 3 osv.
- Betrakt likning 2 i det nye systemet og bruk denne til å finne x_2 uttrykt ved $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Bruk uttrykket for x_2 til å eliminere x_2 i likning 3, likning 4 osv.

Gauss, del I: Foroverelimination

- Løs likning 1 mhp. x_1, dvs. finn x_1 uttrykt ved de øvrige variablene. Bruk dette uttrykket til å eliminere x_1 i likning 2, likning 3 osv.
- Betrakt likning 2 i det nye systemet og bruk denne til å finne x_2 uttrykt ved $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Bruk uttrykket for x_2 til å eliminere x_2 i likning 3, likning 4 osv.
- Fortsett slik inntil man har eliminert x_{n-1} fra siste likning.

Dette forenkler likningssystemet!

Gauss, del I: Foroverelimination

- Løs likning 1 mhp. x_1, dvs. finn x_1 uttrykt ved de øvrige variablene. Bruk dette uttrykket til å eliminere x_1 i likning 2, likning 3 osv.
- Betrakt likning 2 i det nye systemet og bruk denne til å finne x_2 uttrykt ved $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Bruk uttrykket for x_2 til å eliminere x_2 i likning 3, likning 4 osv.
- Fortsett slik inntil man har eliminert x_{n-1} fra siste likning.

Dette forenkler likningssystemet!

- hva med løsningsmengden? Ekvivalens.
- struktur på det forenklede systemet

Gauss, del II: Tilbakesubstitusjon

- siste likning har bare x_n som ukjent: løs den!
- Likning nr. $n-1$ inneholder bare variablene x_{n-1} og x_n, og siden vi har bestemt x_n, finner vi her x_{n-1}.
- fortsett slik med likning $n-2$ osv.

Resultat: vi finner en løsning av likningssystemet.

Eksempel

Systemet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \end{array}$$

Forovereliminasjon:

- finner fra likning 1: $x_1 = 3 - x_2 + x_3 - 2x_4$
- setter dette inn i likning 3 (likning 2 er allerede fri for x_1).
- får nytt system

Eksempel

Systemet:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 7 \end{array}$$

Forovereliminasjon:

- finner fra likning 1: $x_1 = 3 - x_2 + x_3 - 2x_4$
- setter dette inn i likning 3 (likning 2 er allerede fri for x_1).
- får nytt system

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ & & & & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \end{array}$$

Eks. forts.

- neste variabel: x_3 fordi x_2 ble eliminert ved en "tilfeldighet".
- fra likning 2 finner vi x_3 og bruker dette til å eliminere x_3 fra likning 3:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 &= 4 \\ -4x_4 &= -4 \end{aligned}$$

Dette avslutter forovereliminasjon.

Eks. forts.

Tilbakesubstitusjon:

- fra likning 3 får vi $x_4 = 1$
- dermed gir likning 2 at $x_3 = 4 - x_4 = 4 - 1 = 3$.
- Endelig, første likning gir
  $x_1 = 3 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 - x_2 + 3 - 2 \cdot 1 = 4 - x_2$.
- Så: x_2 er ikke er entydig bestemt
- den generelle løsningen er

$$x_1 = 4 - x_2, \quad x_2 \text{ er fri}, \quad x_3 = 3, \quad x_4 = 1.$$

Gauss eliminasjon: oppsummering

Så: Gauss eliminasjon:

Gauss eliminasjon: oppsummering

Så: Gauss eliminasjon:

- 1. Forovereliminasjon: bruker likning k til å eliminere x_k i likningene $k+1, k+2, \ldots, n$ for $k = 1, 2, \ldots, n$,
- 2. Tilbakesubstitusjon: bruker likning k til å bestemme x_k (variablene $x_{k+1}, \ldots, x_n$ er allerede bestemt) for $k = n, n-1, \ldots, 1$.

Kommentarer

Forenklet litt, men metoden virker generelt ved et par justeringer:

Kommentarer

Forenklet litt, men metoden virker generelt ved et par justeringer:

- Det er f.eks. ikke sikkert at x_1 forekommer i likning 1, men kanskje i likning 4 (for første gang). Da kan vi bytte likning 1 og likning 4, og gå videre med eliminasjonen. Kalles (rad)pivotering.
- Underveis i prosessen kan det også hende at vi må hoppe over neste variabel fordi den allerede har blitt eliminert "ved en tilfeldighet"; dette skjedde med x_2 i eksemplet.

Løsningsmengden

Hva med løsningsmengden?

Løsningsmengden

Hva med løsningsmengden?

Teorem: *Ethvert $m \times n$ lineært likningssystem har enten ingen løsning, en unik løsning eller uendelig mange løsninger.*

Matrisemetoden

- Bortsett fra små problemer løses LL på datamaskiner
- eliminasjonsmetoden må foreandres slik at dette blir mulig.
- Maskinen regner med tall, ikke symbolsk med variable...

Matrisemetoden

- Bortsett fra små problemer løses LL på datamaskiner
- eliminasjonsmetoden må foreandres slik at dette blir mulig.
- Maskinen regner med tall, ikke symbolsk med variable...

LL i eks. foran kan representeres ved en matrise (= rektangulær tabell med tall):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- rader og kolonner
- rader: likninger, kolonner: variable
- siste kolonne: høyresiden
- utvidet koeffisientmatrise

Elementære radoperasjoner

- R1: *bytt om to rader*
- R2: *multipliser en rad med et tall ulik 0*
- R3: *adder et multippel av en rad til en annen rad*.

Elementære radoperasjoner

- R1: *bytt om to rader*
- R2: *multipliser en rad med et tall ulik 0*
- R3: *adder et multippel av en rad til en annen rad.*

Tolkning på LL:

- R1: bytte om rekkefølgen på to likninger
- R2: gange en likning med et tall (ulik 0)
- R3: adder et multippel av en likning til en annen likning.

Vi har nå følgende enkle, men viktige, resultat.

Elementære radoperasjoner

- R1: *bytt om to rader*
- R2: *multipliser en rad med et tall ulik 0*
- R3: *adder et multippel av en rad til en annen rad.*

Tolkning på LL:

- R1: bytte om rekkefølgen på to likninger
- R2: gange en likning med et tall (ulik 0)
- R3: adder et multippel av en likning til en annen likning.

Vi har nå følgende enkle, men viktige, resultat.

Teorem: *Radoperasjonene R1, R2 eller R3 bevarer løsningsmengden til likningssystemet.*

Eksempel

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Adder først (-1) ganget med første rad til tredje rad. Dette gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at det tilsvarende likningssystemet er

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3,\ x_3 + x_4 = 4,\ 2x_3 - 2x_4 = 4$$

Eks. forts.

Vi fortsetter nå og adderer (-2) ganget med andre rad til tredje rad, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

Dette avslutter forovereliminasjon, og vi finner en løsning ved tilbakesubstitusjon.

Redusert trappeform

Fortsette reduksjonen ytterligere: Først multipliserer vi tredje rad med $-1/4$ og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Så adderer vi (-1) ganget med tredje rad til andre rad og (-2) ganget tredje rad til første rad, og får

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Redusert trappeform forts.

Og til slutt addererer vi andre rad til første rad, som gir

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Vi ser at det tilhørende likningssytemet er (som før)

$$x_1 + x_2 = 4,\ x_3 = 3,\ x_4 = 1 \text{ (og } x_2 \text{ fri)}$$

Siste matrise kalles den reduserte trappeformen til den opprinnelige matrisen.

Redusert trappeform - teori

Redusert trappeform betyr at:

- første ikkenull i hver rad er en ener (kalles ledende ener)
- de ledende enerne ligger til høyre når man går nedover i radene
- over (og under) hver ledende ener er det bare nuller
- evt. rader med bare nuller er samlet til slutt.

Følgende generelle resultat holder.

Redusert trappeform - teori

Redusert trappeform betyr at:

- første ikkenull i hver rad er en ener (kalles ledende ener)
- de ledende enerne ligger til høyre når man går nedover i radene
- over (og under) hver ledende ener er det bare nuller
- evt. rader med bare nuller er samlet til slutt.

Følgende generelle resultat holder.

Teorem: *Enhver $m \times n$ matrise A kan ved radoperasjoner reduseres til en unik matrise M som er på redusert trappeform. Løsningsmengden til det tilhørende lineære likningssystemet kan leses ut fra M.*

Litt ekstra: vektorrom

Ytterligere innsikt i stukturen til løsningsmengden av LL.

- variablene ordnes i et *n*-tuppel

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

- kalles en vektor
- mengden av alle slike *n*-vektorer danner en algebraisk struktur, betegnet $\mathbb{R}^n$, som man kaller et vektorrom.
- addisjon av vektorer, multiplikasjon med tall (skalarer) (komponentvis)
- $(1, 4, 2) + (-1, 1, 0) = (0, 5, 2)$ og $2(1, 2, 3) = (2, 4, 6)$.
- Et lineært underrom i $\mathbb{R}^n$ er en delmengde L som er lukket under addisjon av vektorer og multiplikasjon med tall.

Vektorrom forts.

Teorem:

- *Betrakt et lineært likningsystem der alle tallene på høyre side er 0 (systemet kalles da* homogent*)*
- *Da er løsningsmengden til systemet et lineært underrom.*
- *Videre finnes det vektorer* $z^1, z^2, \ldots, z^k \in \mathbb{R}^n$ *slik at denne løsningsmengden b består av alle vektorer*

$$x = t_1 z^1 + t_2 z^2 + \cdots + t_k z^k$$

der $t_1, t_2, \ldots, t_k$ *er vilkårlige reelle tall.*

- *Løsningsmengden til et inhomogent system er en translasjon av et lineært underrom (dette kalles en affin mengde), dvs. vi adderer en fast vektor* z^0 *til alle vektorene i underrommet.*

Programvare demo.

- MATLAB
- ...

Lineær optimering: Hovedpunkter

- hva er lineær optimering = LP
- hvordan løse: simpleksalgoritmen
- anvendelser
- teoretiske resultater

Optimering

- matematisk optimering
- minste evt. største verdi på en gitt funksjon
- basert på lineær algebra og analyse
- Feltet deles opp ut fra egenskaper ved problemene som funksjonstype og begrensninger på variablene.
- skal se paa lineær optimering
- vil maksimere en lineær funksjon i flere variable under lineære begrensinger på variablene.
- også kalt LP - lineær programmering
- George B. Dantzig (1914–2005)

Eksempel - begreper

$$
\begin{aligned}
&\text{maksimer} && 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
&\text{forutsatt at} \\
& && x_1 + x_2 + x_3 \leq 25 \\
& && x_1, x_2, x_3 \geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

- variable (de ukjente) x_1, x_2 og x_3.
- Funksjonen $f(x) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$ vi ønsker å maksimere kalles objektivfunksjonen, (målfunksjonen).
- vil maksimere f under lineære begrensninger på variablene. Ser at maksimumsverdien, optimal verdi, er 125 og at tilhørende optimal løsning er $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$, eller $x = (0, 0, 25)$.

Litt verre....

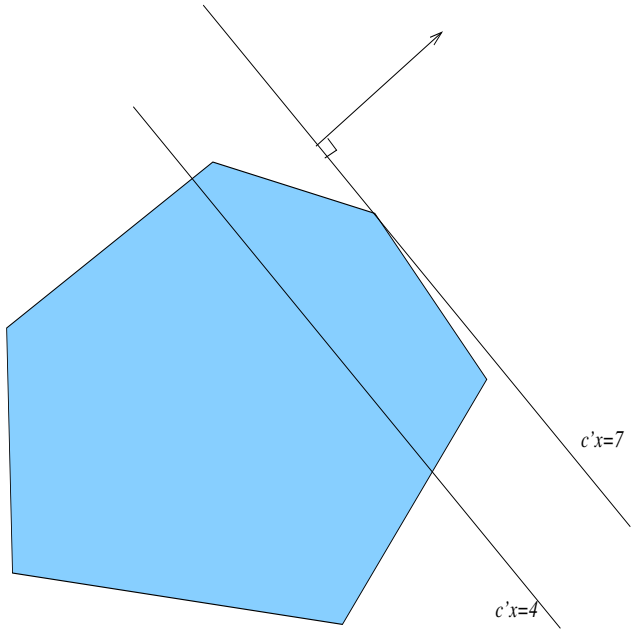
$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{maksimer} & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & & \\
\text{forutsatt at} & & & & & & & & & \\
& 3x_1 & - & x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & \leq & 12 \\
& x_1 & + & 3x_2 & - & 16x_3 & + & 3x_4 & \leq & 2 \\
& -4x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & - & 9x_4 & \leq & 24 \\
& 12x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 8 \\
& x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 9 \\
& & & & & x_1, x_2, x_2, x_4 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Problemer og metoder

- anvendelser: mange variable og begrensninger, gjerne tusenvis og av og til oppimot flere millioner.
- bruker datamaskiner
- trenger effektive metoder
- simpleksmetoden er en slik praktisk effektiv metode.
- fra 1951, men kontinuerlig videreutviklet

LP i to variable

- illustrerende
- av interesse i bl.a. finans, DEA analyse i økonomi, statistikk
- området av tillatte løsninger er et polyeder
- løsninger med samme verdi på f er linjer som står vinkelrett på c.



Simpleksmetoden

- Generell metode for LP problemer.
- Er implementert i programsystemer
- Metoden bygger videre på eliminasjon!

Simpleksmetoden

- Generell metode for LP problemer.
- Er implementert i programsystemer
- Metoden bygger videre på eliminasjon!

Først: fra ulikheter til likheter.

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{maks} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & \\
\text{f.a.} & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 6 \\
 & & & & & x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

- Ulikheten $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ erstattes med den lineære likningen

$$2x_1 + x_2 + x_3 + w_1 = 3,\ w_1 \geq 0.$$

Simpleksmetoden

- w_1 er en ny variabel, kalles en slakkvariabel.
- Den opprinnelige ulikheten holder hvis og bare hvis likningen holder for en eller annen $w_1 \geq 0$.
- får da

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcl}
\text{maks} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & & & & & & & & \\
\text{f.a.} & & & & & & & & & & & & & \\
 & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & w_1 & & & & & = & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & + & w_2 & & & = & 2 \\
 & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & & & + & w_3 & = & 6 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, w_1, w_2, w_3 & & & & & \geq & 0
\end{array}
$$

- omskrivningen har gitt oss begrensninger som er et 3×6 lineært likningsystem.

Basisliste og basisløsning

- bare interessert i ikkenegative løsninger av dette systemet
- blant disse, vil vi ha en løsning som maksimerer funksjonen $3x_1 + 4x_2 + x_3$.

Løser likningene med hensyn på variablene w_1, w_2 og w_3 (som er lettest!) og får (med en noe forenklet skrivemåte)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \xi & = & 0 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \\ \hline w_1 & = & 3 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\ w_2 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & & \\ w_3 & = & 6 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 \end{array}$$

Basisliste og basisløsning

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\xi & = & 0 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 3 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
w_2 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & & \\
w_3 & = & 6 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3
\end{array}
$$

- Får en spesiell løsning ved å la alle variablene på høyre side, altså x_1, x_2 og x_2, være 0.
- Da får vi $w_1 = 3$, $w_2 = 2$ og $w_3 = 6$.
- denne løsningen kalles en basisløsning.
- den tilhørende verdien på objektivfunksjonen er $\xi = 0$.

Simpleksmetoden - hovedidé

Simpleksmetoden består i følgende to skritt som gjentas:

- 1. bruk basislisten til å sjekke om basisløsningen er optimal
- 2. hvis ikke optimal, finn en ny basisløsning med større verdi på ξ.

Detaljer 1

- variablene på venstre side (her w_i-ene) kalles basisvariable, mens de på høyre side kalles ikkebasisvariable.
- basisløsningen er ikke optimal fordi vi kan f.eks. øke x_2 og få en høyere verdi på ξ.
- "naturlig" å øke x_2 (hvorfor?)
- men: vi beholder $x_1 = x_3 = 0$ (dette er enklest!).

Detaljer 1

- variablene på venstre side (her w_i-ene) kalles basisvariable, mens de på høyre side kalles ikkebasisvariable.
- basisløsningen er ikke optimal fordi vi kan f.eks. øke x_2 og få en høyere verdi på ξ.
- "naturlig" å øke x_2 (hvorfor?)
- men: vi beholder $x_1 = x_3 = 0$ (dette er enklest!).
- hvor mye kan x_2 økes?

Detaljer 2

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & 0 & + & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 3 & - & 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
w_2 & = & 2 & - & x_1 & - & x_2 & & \\
w_3 & = & 6 & - & 2x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3
\end{array}
$$

- Fra første likning ser vi at vi må la $x_2 \leq 3$ for ellers blir w_1 negativ. Videre, andre og tredje likning gir hhv. begrensningene $2 - x_2 \geq 0$ og $6 - 2x_2 \geq 0$, som gir $x_2 \leq 2$ og $x_2 \leq 3$.
- For å sikre at ingen av basisvariablene blir negative, vil vi nå øke x_2 til 2, som svarer til det strengeste kravet vi fikk fra de tre likningene.

Detaljer 3

- Men når vi øker x_2 får basisvariablene nye verdier, nemlig

$$w_1 = 3 - x_2, \; w_2 = 2 - x_2, \; w_3 = 6 - 2x_2$$

- så når $x_2 = 2$ blir $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ og $w_3 = 2$.
- Det var w_2 som ble 0 fordi det strengeste kravet var i andre likning.

Detaljer 3

- Men når vi øker x_2 får basisvariablene nye verdier, nemlig

$$w_1 = 3 - x_2, \; w_2 = 2 - x_2, \; w_3 = 6 - 2x_2$$

- så når $x_2 = 2$ blir $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ og $w_3 = 2$.
- Det var w_2 som ble 0 fordi det strengeste kravet var i andre likning.
- Vi skriver nå om andre likning slik at x_2 uttrykkes ved hjelp av de øvrige variablene. Dette gir

$$x_2 = 2 - x_1 - w_2.$$

- Vi får et ekvivalent likningssystem ved å erstatte andre likning med den nye formen og erstatte x_2 med $2 - x_1 - w_2$ i de to øvrige likningene og i objektivfunksjonen.

Pivotering: omforming av systemet

"Mini-algebra" gir

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & 8 & - & x_1 & - & 4w_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 1 & - & x_1 & + & w_2 & - & x_3 \\
x_2 & = & 2 & - & x_1 & - & w_2 & & \\
w_3 & = & 2 & & & + & 2w_2 & - & 3x_3
\end{array}
$$

- Dette er vår nye basisliste,
- Regneoperasjonene vi har gjort kalles en pivotering.

Pivotering - generelt

- nn pivotering er altså en omforming av likningsystemet ved at en ny variabel kommer inn i basis og en annen variabel går ut av basis.
- basis er mengden av basisvariable (egentlig er det variabelnummerne)
- regneoperasjonene i en pivotering svarer til elementære radoperasjoner for lineære likninger.
- derfor: gammelt og nytt system ekvivalent, dvs. samme løsningene

Ny pivotering i eksemplet

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & 8 & - & x_1 & - & 4w_2 & + & x_3 \\
\hline
w_1 & = & 1 & - & x_1 & + & w_2 & - & x_3 \\
x_2 & = & 2 & - & x_1 & - & w_2 & & \\
w_3 & = & 2 & & & + & 2w_2 & - & 3x_3
\end{array}
$$

- ny basisløsning er $w_1 = 1$, $x_2 = 2$, $w_3 = 2$ og $x_1 = w_2 = x_3 = 0$, og objektivfunksjonen er $\xi = 8$.
- Vi har altså funnet en bedre løsning og klart å øke ξ fra 0 til 8.
- kan øke ξ mer!
- ser at en økning av x_3 vil gi høyere ξ.
- Så vi velger å ta x_3 inn i basis.
- Hvor mye kan vi øke x_3?

Ny piv. forts.

- Når x_3 økes (mens de andre to ikkebasisvariablene x_1 og w_2 holdes fast lik 0) vil basisvariablene w_1 og w_3 avta, mens basisvariabelen x_2 ikke endres.
- Vi kan øke x_3 til $2/3$, og da blir w_3 lik 0.
- Vi gjennomfører derfor en pivotering ved å ta x_3 inn i basis og w_3 ut av basis. Ved å skrive om basislikingen for w_3 og gjennomføre eliminasjonen får vi

Ny piv. forts.

- Når x_3 økes (mens de andre to ikkebasisvariablene x_1 og w_2 holdes fast lik 0) vil basisvariablene w_1 og w_3 avta, mens basisvariabelen x_2 ikke endres.
- Vi kan øke x_3 til $2/3$, og da blir w_3 lik 0.
- Vi gjennomfører derfor en pivotering ved å ta x_3 inn i basis og w_3 ut av basis. Ved å skrive om basislikingen for w_3 og gjennomføre eliminasjonen får vi

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
\xi & = & 26/3 & - & x_1 & - & (10/3)w_2 & - & (1/3)w_3 \\
\hline
w_1 & = & 1/3 & - & x_1 & + & (1/3)w_2 & + & (1/3)w_3 \\
x_2 & = & 2 & - & x_1 & - & w_2 & & \\
x_3 & = & 2/3 & & & + & (2/3)w_2 & - & (1/3)w_3
\end{array}
$$

Avslutning

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\xi & = & 26/3 & - & x_1 & - & (10/3)w_2 & - & (1/3)w_3 \\
\hline
w_1 & = & 1/3 & - & x_1 & + & (1/3)w_2 & + & (1/3)w_3 \\
x_2 & = & 2 & - & x_1 & - & w_2 & & \\
x_3 & = & 2/3 & & & + & (2/3)w_2 & - & (1/3)w_3
\end{array}
$$

- alle ikkebasisvariablene har ikkepositiv koeffisient i objektivfunksjonen

Avslutning

$$
\begin{array}{lcrcrcrcr}
\xi & = & 26/3 & - & x_1 & - & (10/3)w_2 & - & (1/3)w_3 \\
\hline
w_1 & = & 1/3 & - & x_1 & + & (1/3)w_2 & + & (1/3)w_3 \\
x_2 & = & 2 & - & x_1 & - & w_2 & & \\
x_3 & = & 2/3 & & & + & (2/3)w_2 & - & (1/3)w_3
\end{array}
$$

- alle ikkebasisvariablene har ikkepositiv koeffisient i objektivfunksjonen
- OPTIMAL LØSNING !!!!
- Fordi: enhver annen løsning fremkommer ved at ikkebasisvariablene økes (minst én av dem) og da blir verdien på objektivfunksjonen lavere.
- Optimal løsning er $w_1 = 1/3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2/3$, $x_1 = 0$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$.
- Faktisk: dette må være en *unik* optimal løsning fordi ...

Litt mer: LP på andre former

- Alle LP problemer kan skrives om til standardformen der vi har: maksimering, $\leq$ ulikheter, og ikkenegative variable.
- minimere f.eks. $2x_1 - 3x_2$ under visse krav, er dette ekvivalent med å maksimere den negative av funksjonen, dvs. $-2x_1 + 3x_2$.
- $\geq$ ulikheter kan konverteres til $\leq$ ulikheter ved å multiplisere med -1.
- hver likning kan erstattes med to ulikheter, én hver vei. F.eks. erstattes $2x_1 + 5x_2 = 4$ med $2x_1 + 5x_2 \leq 4$, $-2x_1 - 5x_2 \leq -4$.
- I LP programsystemer gjøres omskrivninger i koden slik at bruker slipper å tenke på disse konverteringene.

Startløsning

- Hvordan finne en startløsning?

Startløsning

- Hvordan finne en startløsning?
- hvis standardform: en startløsning ved å la alle slakkvariablene være basisvariable.
- Da er $x_1 = x_2 = \cdots = 0$, og slakkvariablene er lik de respektive høyresidene i ulikhetene. OK når disse er ≥ 0.
- hva hvis $b_i < 0$ for minst en i?

Startløsning

- Hvordan finne en startløsning?
- hvis standardform: en startløsning ved å la alle slakkvariablene være basisvariable.
- Da er $x_1 = x_2 = \cdots = 0$, og slakkvariablene er lik de respektive høyresidene i ulikhetene. OK når disse er ≥ 0.
- hva hvis $b_i < 0$ for minst en i?
- Kan stille opp Fase 1 problemet: dette er et nytt LP problem med en ekstra variabel som representerer et tillegg på høyresiden
- man får ulikheter $\ldots \leq b_i + z$, så lett å finne en startløsning her (bruk z stor nok!)
- løser Fase 1 med simpleksalgoritmen. Resultatet er en startløsning (dersom det i det hele tatt finnes) som brukes til å starte simpleksalgoritmen på den egentlige LP problemet.

Sirkling

- Det kan tenkes at simpleksalgoritmen ikke avsluttes.
- Sirkling: gjentatte pivoteringer der verdien på objektivfunksjonen er den samme, for så vende tilbake til en basis man har besøkt tidligere.
- erfaring viser at dette ikke er noe praktisk problem.
- Men deter en teoretisk mulighet, eks. på sirkling er kontruert.
- man har (heldigvis) funnet teknikker (pivoteringsregler) som garantert unngår slik sirkling.

LP fundamentalteoremet

Vi avslutter med et teorem som kalles fundamentalteoremet for lineær programmering.

LP fundamentalteoremet

Vi avslutter med et teorem som kalles fundamentalteoremet for lineær programmering.

Teorem: *Dersom et LP problem har en tillatt løsning, så har det også en tillatt basisløsning.*
Dersom et LP problem har en optimal løsning, så har det også en optimal basisløsning.

Dette resultatet kan utledes fra en analyse av simpleksmetoden, ved å vise at den avsluttes etter et endelig antall pivoteringer, og da med en optimal løsning, evt. vises at problemet ikke har noen tillatt løsning eller ubegrenset optimal verdi.

Program demo.

- Pivoteringsverktøy. R. Vanderbei har skrevet en utmerket bok om LP *Linear programming*, også interessant nettside

  http://www.princeton.edu/∼rvdb/LPbook/
- demonstrer pivoteringsverktøyet .... til Vanderbei
- MATLAB
- TSP nettsiden

Regresjon: Hovedpunkter

- hva er regresjon
- anvendelser
- hvordan løse: normallikningene
- matriseregning
- teoretiske resultater

Hva er regresjon?

- naturvitenskap, ingeniørfag, økonomi og samfunnsfag
- studere et fenomen der ulike størrelser varierer: finne en mest mulig presis sammenheng mellom disse størrelsene.

Hva er regresjon?

- naturvitenskap, ingeniørfag, økonomi og samfunnsfag
- studere et fenomen der ulike størrelser varierer: finne en mest mulig presis sammenheng mellom disse størrelsene.
- medisin: sammenhengen mellom behandlingsmåter og forbedring i helsetilstand
- økonomi: f.eks. sammenhenger mellom økonomiske indikatorer og arbeidsløshet, eller sammenhengen mellom kostnader og produksjonsvolum i et firma. Regresjon er en generell metodikk for å finne slike empiriske funksjoner dvs. funksjoner som gir sammenhenger mellom ulike størrelser basert på data (observasjoner).

Hva er regresjon?

- naturvitenskap, ingeniørfag, økonomi og samfunnsfag
- studere et fenomen der ulike størrelser varierer: finne en mest mulig presis sammenheng mellom disse størrelsene.
- medisin: sammenhengen mellom behandlingsmåter og forbedring i helsetilstand
- økonomi: f.eks. sammenhenger mellom økonomiske indikatorer og arbeidsløshet, eller sammenhengen mellom kostnader og produksjonsvolum i et firma. Regresjon er en generell metodikk for å finne slike empiriske funksjoner dvs. funksjoner som gir sammenhenger mellom ulike størrelser basert på data (observasjoner).
- matematisk (statistisk) modell med visse parametre (ukjente)
- regresjon: finn parameterverdier som gjør at modellen tilpasser dataene best mulig.

Kvadratisk regresjon

- produksjonsfirma
- dataene $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ der x angir produksjonskvantum og y angir produksjonskostnad *pr. enhet*. F.eks. observasjoner påfølgende dager.

Kvadratisk regresjon

- produksjonsfirma
- dataene $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ der x angir produksjonskvantum og y angir produksjonskostnad *pr. enhet*. F.eks. observasjoner påfølgende dager.
- bruker ofte en (konveks) parabel for å beskrive sammenhengen

$$y = a + bx + cx^2 + \text{en liten feil}$$

der a, b og $c > 0$ er ukjente parametre.

- Regresjonsproblemet: finn verdier på a, b og c slik at

$$y_i \approx a + bx_i + cx_i^2 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots n$$

- kvadratisk feil:

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i + cx_i^2))^2.$$

denne: kvadratisk optimeringspr

begrensninger

Kvadratisk regresjon: eksempel

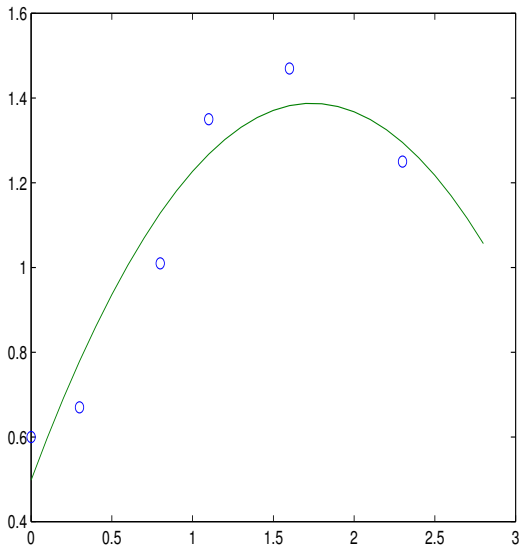


Figure: Konkav kvadratisk funksjon: regresjon

Regresjon – oversikt

- vi har en modell med visse ukjente parametre
- vi har visse datapunkter (observasjoner) for denne modellen
- vi vil minimere total modellfeil for observasjonene
- vi får da et optimeringsproblem som må løses.

Lineær regresjon

- datapunkter $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_m, y_m)$
- lineær modell

$$y = a + bx$$

- minimere feilen

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (a + bx_i))^2$$

- finner da regresjonslinjen for y mhp. x

Metoden over kalles minste kvadraters metode (MK) fordi den totale feilfunksjonen er en sum av kvadrater. Metoden kan føres tilbake til vår venn Carl F. Gauss.

Multippel regresjon

- ofte vil man finne hvordan en variabel y (regresjonsvariabelen) avhenger av flere uavhengige variable, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
- kalles multippel regresjon
- igjen ser vi på y som en empirisk funksjon av x_i-ene, introdusere en feilfunksjon som minimeres.
- enkleste type: lineær multippel regresjon

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

der $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ er ukjente parametre.

- bestem optimale verdier på disse parametrene slik en total feilfunksjon (gjerne kvadratisk) minimeres.

Eks.: $y = L(x_1, x_2)$+feil

- to uavhengige variable x_1 og x_2: bruker modellen

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$$

- datapunkter (x_{11}, x_{12}, y_1), (x_{21}, x_{22}, y_2), ..., (x_{m1}, x_{m2}, y_m). Så den første indeksen på x angir datapunkt nummer, mens den andre indeksen angir hvilken fri variable som hører til.
- Feilfunksjonen er

$$E(\beta_0, \beta_1, \beta_2) = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2}))^2$$

- minimere mhp. parameterne β_0, β_1 og β_2.
- geometrisk: finn et plan i rommet slik at summen av de "vertikale" avstandene fra datapunktene til planet skal bli minst mulig.

Kommentar

Det finnes også ulineære modeller, ved å bruke f.eks. kvadratiske polynomer eller mer generelle polynomer, eksponential eller logaritme funksjoner.

Egenskaper

- Alle disse regresjonsproblemene, når vi bruker minste kvadraters metode, kan løses ved hjelp av lineær algebra.
- får lineære likningssystemer selv når modellen er ulineær!
- fordi modellen er lineær i de ukjente parameterne!

Egenskaper

- Alle disse regresjonsproblemene, når vi bruker minste kvadraters metode, kan løses ved hjelp av lineær algebra.
- får lineære likningssystemer selv når modellen er ulineær!
- fordi modellen er lineær i de ukjente parameterne!

For å se litt nærmere på dette trenger vi begrepet matrisemultiplikasjon.

Konsekvens: ulike typer regresjonsproblemer kan behandles under ett, felles analyse.

Matrisemultiplikasjon

Matrise:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Minner om rader og kolonner.

- Skalarproduktet mellom to vektorer $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er tallet $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.
- Matriseproduktet $C = AB$ mellom en $m \times n$ matrise A og en $n \times k$ matrise B er $m \times k$ matrisen C gitt ved at elementet i rad i og kolonne j er lik skalarproduktet mellom rad i i A og kolonne j i B, dvs.

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}.$$

Eksempel matrisemultiplikasjon

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 12 & 11 \end{bmatrix}.$$

Vi går nå inn på de grunnleggende operasjonene addisjon og multiplikasjon med skalar for matriser. Dette vil bli brukt under for å formulere og løse regresjonsproblemer. De nevnte operasjonene foregår komponentvis, f.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Legg merke til at addisjon av matriser bare har mening når matrisen has samme størrelse.

Lineære likninger – igjen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 & & & & \vdots & & & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

På matriseform kan dette skrives enkelt som

$$Ax = b$$

der A er koeffisientmatrisen, x vektoren med de ukjente, og b vektoren med høyresidene

Lineære likninger – igjen

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

- x og b kolonnevektorer (matriser med én kolonne)
- matriseproduktet Ax er en kolonnevektor og $(Ax)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$.
- matriselikningen $Ax = b$ betyr at de to matrisene Ax og b er like komponent for komponent dvs.
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ for $i = 1, 2, \ldots, m$.

Lineære likninger – igjen

...forøvrig er løsningen av $Ax = b$ lik

$$x = A^{-1}b$$

hvis ...

Regneregler

Regneregler for matriser (matrisealgebra):

- $A(BC) = (AB)C$
- $A(B + C) = AB + AC$ og $(A + B)C = AC + BC$

Dette betyr at man kan regne med matriser.
NB: $AB = BA$ holder ikke generelt!

Den transponerte A^T av en matrise A: i'te rad i A^T er i'te kolonne i A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Tilbake til regresjon

- lineær regresjon med én uavhengig variabel

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1$$

- innfører matriser

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ & \vdots \\ 1 & x_m \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

- Vektoren $e = y - X\beta$ vil da ha komponenter $e_i = y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i)$ så dette er feilvektoren.
- Ved minste kvadraters metode vil vi minimere

$$\sum_{i=1}^{m} e_i^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

Tilbake til regresjon

Dette er det samme som $\|e\|^2$ der $\|e\|$ kalles lengden, eller normen, til vektoren e og er definert som

$$\|e\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} e_i^2}$$

Regresjonsproblemet blir da:

- minimer $\|y - X\beta\|^2$,ekvivalent minimer $\|y - X\beta\|$, over alle vektorer $\beta \in \mathbb{R}^2$.

Løsning

Kan vise (ved noe analyse) at β er en løsning av dette MK problemet hvis og bare hvis β er en løsning av følgende lineære likningssystem

$$X^T X\beta = X^T y.$$

Dette systemet kalles normallikningene.

Eksempel

Vi skal finne regresjonslinjen for punktene $(1,1)$, $(3,2)$ og $(4,5)$. Her er $m = 3$ og

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

som gir

$$X^T X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}, \quad X^T y = \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Ved å løse normallikningene f.eks. ved Gauss eliminasjon får vi (tilnærmet) $\beta_0 = -0.5714$ og $\beta_1 = 1.2143$.

Kvadratisk regresjon

Kvadratisk modell med én uavhengig variabel

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2$$

De gitte datapunktene er $(x_1, , y_1)$, (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m). Vi innfører følgende matriser

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Og igjen vil minste kvadraters metode lede til at vi minimerer (kvadratet av) normen til feilvektoren

$$y - X\beta$$

Kvadratisk regresjon

som jo har komponenter $y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2})$. Dette problemet løses ved å løse normallikingene

$$X^T X\beta = X^T \beta.$$

Dette er et 3×3 lineært likningssystem som f.eks. kan løses ved Gauss eliminasjon.
Forresten, i matematisk programvare for regresjon, brukes ikke Gauss eliminasjon for slike problemer, men istedet den såkalte QR-metoden. Dette er en metode som er mer robust overfor avrundingsfeil.

Multippel regresjon

Til slutt ser vi på multippel regresjon der vi har modellen

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

og datapunkter $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, y_i)$ for $i = 1, 2, \ldots, m$. Vi innfører matrisene

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Vi betrakter minste kvadaters problemet der vi vil minimere kvadratfeilen

$$\|y - X\beta\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\beta_j)^2$$

Multippel regresjon

Følgende teorem sier oss hvordan dette problemet løses.

Multippel regresjon

Følgende teorem sier oss hvordan dette problemet løses.

Teorem: *En vektor β minimerer kvadratfeilen over hvis og bare hvis β er løsning av normallikningene*

$$X^T X\beta = X^T y.$$

Dette systemet har alltid en løsning, og løsningen er entydig hvis kolonnene i X er lineært uavhengige.

Bevis – skisse

- kvadratfeilen er en konveks kvadratisk funksjon f i n variable. For slike funksjoner vet man fra analyse (konveks optimering) at et punkt β er (absolutt, globalt) minimum for funksjonen f hvis og bare hvis alle partielle deriverte er null i punktet. (Den partiell deriverte i et punkt mhp x er vanlig derivert av funksjonen når alle de andre variablene holdes konstant.)
- Siden vår feilfunksjon f er kvadratisk gir denne derivasjonen at visse lineære funksjoner skal være null, og dette gir normallikingene ved noe regning.
- For detaljer, se f.eks. Lay *Linear algebra*. Kan også vises ved hjelp av teori for ortogonalitet i vektorrom og "flerdimensjonal Phytagoras".

Vekstmodeller: Hovedpunkter

- vekstmodeller
- eksponentiell vekst
- logistisk vekstmodell
- løsning og beregning

Vekstmodeller og differensialliningar

- ser på et par enkle vekstmodeller
- del av fagfeltet differensialliningar
- dynamiske (tidsvarierende) problemer, løsningen en funksjon av tiden
- overalt i naturvitenskap, teknikk og økonomi
- vekstmodeller: biologi, økonomi

En enkel modell

- modell som beskriver vekst av populasjoner i biologi.
- populasjon av en viss dyreart i et avgrenset geografisk område
- vil finne størrelsen på denne populasjonen (antall) over tid.
- variabel er $N(t)$: antall individer ved tidspunkt t
- N er en funksjon av tiden, tenker oss denne (som forenkling) deriverbar og derfor kontinuerlig
- populasjonens vekstrate er den deriverte av N altså $\frac{dN}{dt}$, eller $N'(t)$.

En enkel modell

- den relative vekstraten er vekstraten dividert med populasjonsstørrelsen

$$\text{relativ vekstrate} = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$$

Så hvis populasjonen er vokser fra 200 ved tidspunkt år t til 250 i år $t+1$, så vekstraten (ca.) $(250-200)/1 = 50$ og den relative vekstraten blir $50/200 = 0.25$.

En enkel modell

- den enkleste modellen er at alle forhold som bestemmer relativ vekst er konstante over tid. Dette betyr at den relative vekstraten også blir konstant, altså

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a$$

- da må N være gitt ved

$$N = N_0 e^{at}.$$

for en konstant N_0 som er populasjonen ved $t = 0$. Dette er en eksponentialfunksjon, og vi har eksponentiell vekst.

En enkel modell

- den enkleste modellen er at alle forhold som bestemmer relativ vekst er konstante over tid. Dette betyr at den relative vekstraten også blir konstant, altså

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a$$

- da må N være gitt ved

$$N = N_0 e^{at}.$$

  for en konstant N_0 som er populasjonen ved $t = 0$. Dette er en eksponentialfunksjon, og vi har eksponentiell vekst.

Modellen over er en såkalt (enkel) lineær differensiallining av første orden, $y' = ay$, og ved integralregning kan man vise at enhver løsning er en eksponentialfunksjon $y = be^{at}$, se f.eks. Gulliksen *Matematikk i praksis*.

Kommentarer

- vekstmodelen over ga eksponentiell vekst
- bygde på den forenklede antakelsen at vekstforholdene var uforandret over tid.
- i praksis vil jo vekstforholdene variere
- for eksempel, vi må regne med at den relative vekstraten i befolkningen i f.eks. Sør-Korea vil gå ned når landet begynner å bli svært tettbefolket (og f.eks. arbeidsmuligheter er redusert).
- ... eller at et lands økonomi ikke vokser til himmels
- flere ulike vekstmodeller er aktuelle, avhengig av antakelser om vekstforhold og kopling til rammevilkår.

Den logistiske vekstmodellen

- neste modell: den logistiske vekstmodellen.
- utvider den enkle modellen
- tar hensyn til at når populasjonen nærmer seg et visst metningspunkt så vil den relative vekstraten gå mot null
- i startfasen: økende vekst av popolasjonen,
- deretter: veksten flater ut og populasjonen nærmer seg metningspunktet.

Den logistiske vekstmodellen

- la K være en gitt *bærekapasitet* (metningspunkt), maks. antall individer som kan leve i det angitte området.
- N populasjonens størrelse og $K - N$ blir da "ledig kapasitet"
- i den logistiske vekstmodellen antar man at den relative vekstraten er proporsjonal med ledig kapasitet, altså

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = a(K - N)$$

- her er a en gitt positiv konstant.
- modellen også kan skrives som

$$\frac{dN}{dt} = aN(K - N).$$

Den logistiske vekstmodellen

$$\frac{dN}{dt} = aN(K - N).$$

- høyresiden i den logistiske modellen en kvadratisk funksjon av N: denne funksjone har nullpunkter $N = 0$ og $N = K$ og er konkav (krummer nedover).
- når N er svært liten i forhold til K, så er høyresiden tilnærmet lik aNK som vi vet gir eksponentiell vekst. Så i startfasen får vi (tilnærmet) eksponentiell vekst.
- .. og når N er nær K vil veksten flate ut

Løsning

Neste teorem gir løsningen av den logistiske modellen. (De konstante funksjonen null eller K er også løsning, som vi ser bort fra under.)

Løsning

Neste teorem gir løsningen av den logistiske modellen. (De konstante funksjonen null eller K er også løsning, som vi ser bort fra under.)

Teorem: *Den generelle (ikketrivielle) løsningen av den logistiske vekstmodellen er*

$$N(t) = \frac{K}{1 + ce^{-aKt}}$$

der c er en vilkårlig konstant.

- modellen er en såkalt separabel diff. likning og kan løses ut fra generelle metoder for slike likninger
- en øvingsoppgave å vise at funksjonen over virkelig er en løsning av likningen. Dette kan da sjekkes ved derivasjon (der man kan benytte kjerneregelen).

Eksempel

Betrakt den logistiske modellen der $a = 0.1$ og $K = 200$. Anta at størrelsen på populasjonen ved $t = 0$ er $N_0 = 40$. Vi måler tiden i antall år. Hva er løsningen N? Fra teoremet har vi at

$$N(t) = \frac{200}{1 + ce^{-20t}}$$

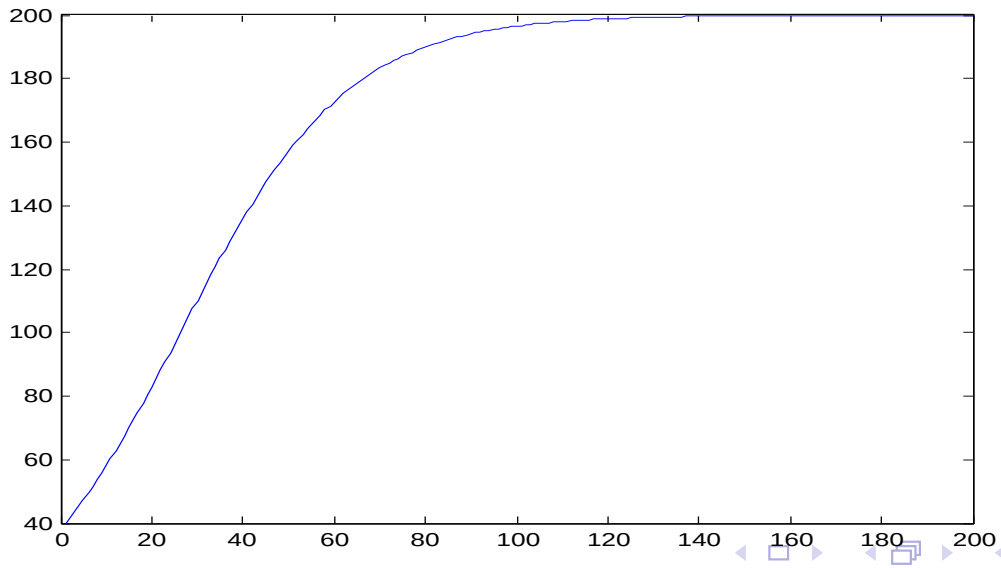
er den generelle løsningen. Her kan vi bruke initialbetingelsen $N(0) = N_0 = 40$ til å bestemme konstanten c. Vi får

$$40 = \frac{200}{1 + ce^{-20 \cdot 0}} = \frac{200}{1 + c}$$

så $c = 200/40 - 1 = 4$. Altså er løsningen

$$N(t) = \frac{200}{1 + 4e^{-20t}}.$$

Eksempel


200
180
160
140
120
100
80
60
40
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200

Eksempel

La oss også se hva som ville skje hvis initialbetingelsen var $N_0 = 400$, som altså er større enn bærekapasiteten $K = 200$. Da får vi

$$400 = \frac{200}{1 + c}$$

som gir $c = 200/400 - 1 = -1/2$. Løsningen er da

$$N(t) = \frac{200}{1 - (1/2)e^{-20t}}.$$

Vi ser at når tiden går mot uendelig vil $N(t)$ nærme seg bærekapasiteten 200. F.eks. etter 1 måned er populasjonene størrelse $N(1/12) = 220$.

Videre lesning

- Gulliksen, T., 1988. *Matematikk i praksis*. Universitetsforlaget, 2004 (1. utgave 1981).
- Johnson, L.W., Riess, R.D. and Arnold, J.T., 1998. *Introduction to linear algebra*, Addison-Wesley.
- Lay, D., 2000 *Linear algebra and Its Applications*, Addison-Wesley.
- Lindstrøm, T., *Kalkulus*, 3.utgave, Universitetsforlaget,Oslo, 2006
- Vanderbei, R.J., 1996 *Linear programming: foundations and extensions*, Kluwer.

Studier man bør merke seg !!!!

... kan anbefales gode elever som liker matematikk, og gjerne vil knytte det til andre fag .....

- Matematikk, informatikk og teknologi: http://www.uio.no/studier/program/mit
- Nyhet: Matematikk og økonomi: http://www.uio.no/studier/program/matokon (tilgjengelig tidlig januar), se også linken under for mer informasjon om studiet
- nettressurser i temaene her, se http://folk.uio.no/geird