Grunnen til at vi vil ha poler i venstre halvplan

Siden jeg ikke fikk tid til å forklare på en ordentlig måte hvorfor polene må være i venstre halvplan for å ivareta stabilitet kommer her en kort forklaring.

Uttrykkene vi har brukt i kapittel 5 har vært på formen:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + s/\omega_p} \text{ eller } A(s) = \frac{A_0}{\left(1 + s/\omega_{p1}\right)\left(1 + s/\omega_{p2}\right)\left(1 + s/\omega_{p2}\right)\cdots\left(1 + s/\omega_{pn}\right)}$$

Dette kan skrives på en mer generell form hvor man etter delbrøkoppspaltning får:

$$F(s) = \frac{K_0}{s + p_0} + \frac{K_1}{s + p_1} + \cdots + \frac{K_n}{s + p_n} \qquad (1)$$

hvor $p_0, p_1, \cdots, p_n$ angir polene til funksjonen. Polene kan i dette tilfellet gjerne ha imaginærdel, i motsetning til på forelesningen og i boka hvor polene kun er reèlle. Dvs.

$p_i = a_i + j\omega_i$ (hvor a_i angir real-delen og ω_i angir imaginærdelen)

Uttrykk (1) over angir poler i venstre halvplan. Hvis man har poler i høyre halvplan blir uttrykket:

$$F(s) = \frac{K_0}{s - p_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \qquad (2)$$

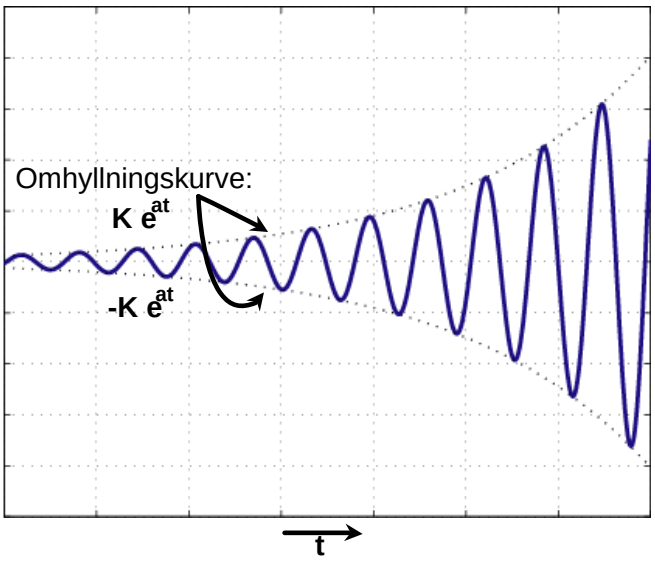
Den inverse (Laplace) transformen til F(s) i uttrykk (2) er gitt ved: (dvs. i tidsdomènet)

$$\begin{aligned} f(t) &= K_0 e^{p_0 t} + K_1 e^{p_1 t} + \cdots + K_n e^{p_n t} \\ &= K_0 e^{a_0 t} e^{j\omega_0 t} + K_1 e^{a_1 t} e^{j\omega_1 t} + \cdots + K_n e^{a_n t} e^{j\omega_n t} \end{aligned}$$

Man ser at realdelen er positiv, dvs. $a_i > 0$. Den tilhørende termen for delbrøk-oppspaltningen i uttrykk (2):

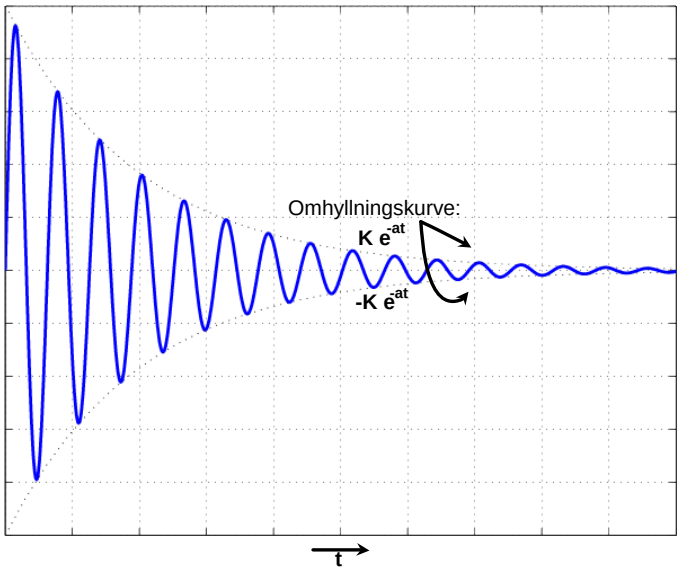
$$K_i e^{a_i t} e^{j\omega_i t}$$

er et eksponentielt økende sinusoid med omhyllningskurve (envelope) $K_i e^{a_i t}$ som vist i figuren øverst på neste side



Poler i høyre halvplan vil altså gi opphav til eksponentielt økende transient-responser. Hvilket tilsier ustabilitet ettersom signalet øker over tid.

Poler i det venstre halvplan i s-planet har negativ real-del, dvs. $\boldsymbol{a_i} < 0$ og vil tilsvarende gi eksponentielt avtagende transisent-responser som gitt på figuren under:



Dette signalet stabiliserer seg etter en viss tid og man har mulighet for et stabilt system ettersom signalet stabiliserer seg mot en verdi over tid. Som sagt på forelesningen trenger det derimot ikke å være nok for å få et stabilt system når systemet har flere poler.

(Øivind, 051006)