PROSJEKT OG HOVEDOPPGAVE I FUNKSJONALANALYSE. HELTALLSMATRISER OG PROJEKSJONER I HILBERTROM.

VEILEDER/KONTAKT: MAGNUS B. LANDSTAD

1. Sammendrag

Hvis A er en matrise med bare hele tall, så kan normen $\|A\|$ bare anta bestemte verdier. De samme verdiene opptrer i studiet av visse projeksjoner i et Hilbertrom. Prosjektet går ut på å studere denne sammenhengen, eventuelt også anvendelser. Det passer både som prosjekt og hovedoppgave.

Nytteverdi: Gir større forståelse for lineære avbildninger over et uendelig dimensjonalt Hilbertrom, og gir eksempler på hvordan tilsynelatende forskjellige deler av matematikk hører sammen. Det er også anvendelser i teoretisk fysikk.

Beskrivelse: Vaughn Jones fikk i 1990 matematikkens Nobelpris (Fields-medaljen) for bl.a. studiet av projeksjoner e_i i et Hilbertrom med følgende egenskaper:

$$\begin{aligned}
&e_i^2 = e_i = e_i^* \\
&e_i e_j = e_j e_i \quad \text{hvis} \quad |i-j| \geq 2 \\
&e_i e_{i+1} e_i = t\ e_i \\
&e_{i+1} e_i e_{i+1} = t\ e_{i+1}
\end{aligned}$$

der $0 < t < 1$. Et eksempel på tre slike projeksjoner er

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} t & \sqrt{t(1-t)} & 0 \\ \sqrt{t(1-t)} & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

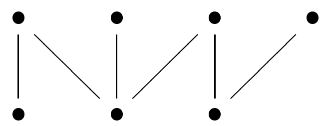
$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t}{1-t} & \frac{\sqrt{t(1-2t)}}{1-t} \\ 0 & \frac{\sqrt{t(1-2t)}}{1-t} & \frac{1-2t}{1-t} \end{pmatrix}.$$

Date: November 6, 2002.

Jones viste at hvis en har uendelig mange slike projeksjoner så er enten $t^{-1} \geq 4$ eller så er $t^{-1} = 4\cos^2 \frac{\pi}{q}$ der q er et heltall. Dette har sammenheng med et resultat av Kronecker fra 1857 som sier at hvis A er en $m \times n$-matrise med alle $a_{i,j} \in \mathbf{Z}$, så er enten normen $\|A\| \geq 2$ eller så er $\|A\| = 2\cos\frac{\pi}{q}$ der q er som over. (Normen til en en matrise er gitt ved at $\|A\|^2 =$ største egenverdi til A^tA.) Han har videre vist at disse resultatene har anvendelser i så ulike områder som knuteteori og statistisk mekanikk. Det er også anvendelser i graf-teori, f. eks. svarer matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

til grafen



Prosjektet går ut på å se på noen av disse sammenhengene, avhengig av studentens interesser vil det være aktuelt med numeriske beregninger på eksempler.

Forutsetninger: Bygger på SIF5020 Lineær metoder eller MNFMA325 Funksjonalanalyse. Gruppeteorien fra SIF5021 Algebra og tallteori (evt. MNFMA205 Gruppeteori) kan være nyttig, så et av disse emnene anbefales.

Samarbeid: Prosjektet er knyttet til operatoralgebra-gruppen som består av Trond Digernes, Magnus Landstad og Christian Skau og andre aktuelle tema fes ved henvendelse til en av disse.

Referanser:

Goodman, de la Harpe og Jones: "Coxeter Graphs and Towers of Algebras", Springer-Verlag, spesielt Kap.1, denne finnes i biblioteket: 512.62 G62c.

En god bakgrunnsartikkel er:

Jones, V.F.R.: "From quantum theory to knot theory and back: a von Neumann algebra excursion", American Mathematical Society centennial publications, Vol. II (Providence, RI, 1988), side 321–336. Denne boka finnes foreløpig ikke i biblioteket, men en kopi av artikkelen kan fås hos meg.

KONTOR: 640 SENTRALBYGG 2, TELEFON: 91753
E-mail address: magnusla@math.ntnu.no