MIDTSEMESTERPRØVE MA0003 VÅREN 2005: LØSNINGSFORSLAG

Merk! Oppgavenumre og svaralternativene viser til det oppgavesettet som er publisert på kurshjemmesiden.

Oppgave 1.

Første løsningsforslag. Bruk det vi kalte for *ettpunktsformelen* (*point-slope formula*, s. 46 i Bittinger):

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

der m er stiginingstallet til linjen, og (x_1, y_1) er et punkt på den. I vårt tilfelle er $m = -2$ (stigningstallet), mens $(x_1, y_1) = (-1, 5)$. Da får vi:

$$y - 5 = -2(x - (-1)) = -2x - 2 \Rightarrow y = -2x + 3.$$

(Husk å sette inn $x_1 = -1$ - ikke $x_1 = 1$ - her!)

Annet løsningsforslag. Se på de oppgitte svaralternativene: Det er kun alternativene (b) og (d) som er aktuelle, siden det er de eneste ligningene med stigningstall -2. Så er det bare å sette inn $x = -1$ i hver av de to ligningene og se hvilken som gir $y = 5$ som svar:$y = -2(-1) + 3 = 2 + 3 = 5$.

Riktig svar: **(d)**

Oppgave 2. Her er det i grunnen bare én ting å gjøre: bruk kjerneregelen (se avsn. 2.8 i Bittinger). Om $f(x) = e^{x \ln x}$ får vi:

$$f'(x) = e^{x \ln x} \frac{d}{dx}(x \ln x) = e^{x \ln x} \left(1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} \right) = e^{x \ln x}(\ln x + 1).$$

Riktig svar: **(b)**

Det kan være fristende å svare alternativ (c), siden det kan minne om regelen for derivasjon av potensfunksjoner, men husk at $e^{x \ln x}$ ikke er en potensfunksjon: eksponenten avhenger av x, mens grunntallet ikke enderer seg. For øvrig er $e^{x \ln x} = e^{\ln x^x} = x^x$.

Oppgave 3. Det er fristende å si at grenseverdien ikke finnes, siden $x \to \infty$. Her er et knep (se s.218-220 i Bittinger) for å finne slike grenseverdier. Vi deler på den *høyeste* potensen av x i teller og nevner i brøken. Dette svarer til å gange med 1. I vårt tilfelle deler vi altså på x^3 i teller og nevner. Da får vi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 + 2x^2 - 1}{5x^3 - 4x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{(4x^3 + 2x^2 - 1)\frac{1}{x^3}}{(5x^3 - 4x + 1)\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}{5 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{4 + 0 - 0}{5 - 0 + 0} = \frac{4}{5}.$$

Riktig svar: **(d)**

Husk at det er akkurat slike grenser som oppstår i forbindelse med horisontale asymptoter.

Oppgave 4. Her må vi huske regelen: $\frac{d}{dx} x^k = k x^{k-1}$, som gjelder for alle reelle tall k (s. 138 i Bittinger). Husk også at $\frac{d}{dx} c f(x) = c \frac{d}{dx} f(x)$ for alle konstanter c. Vi får derfor ($c = -2$, $k = 5/2$):

$$\frac{d}{dx}(-2x^{5/2}) = -2 \cdot \frac{5}{2} x^{5/2 - 1} = -5x^{3/2}.$$

Riktig svar: **(b)**

Oppgave 5. Teorem 16 på side 347 i Bittinger sier at: $\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$. I vårt tilfelle er $a = 8$, og vi får

$$\frac{d}{dx}\log_8 x = \frac{1}{\ln 8}\cdot\frac{1}{x}.$$

Hvis vi glemmer denne setningen, og det er fort gjort, kan vi løse oppgaven ved å huske på at $\log_8 x = (\ln x)/(\ln 8)$. Hvis vi da husker (og dette *må* vi huske) at $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, får vi

$$\frac{d}{dx}\log_8 x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln 8} = \frac{1}{\ln 8}\cdot\frac{1}{x}.$$

Riktig svar: **(c)**

Oppgave 6. Her er det oppgitt at $f(x)$ har et kritisk punkt i $x = \sqrt{2}$. Siden f er deriverbar der den er definert, vet vi at de eneste potensielle maks./min.-verdiene (både relative og absolutte) forekommer i de kritiske punktene (Teorem 2, s. 190 i Bittinger). Legg merke til at når $x \to 0^+$ vil $f(x) \to +\infty$, mens når $x \to 0^-$, vil $f(x) \to -\infty$. Derfor har ikke f noen global maksimums- eller minimumsverdi, og vi kan se bort fra alternativene (d) og (e).

Det vi må gjøre er å finne ut om f' bytter fortegn i $x = \sqrt{2}$. Det kan vi gjøre ved å sette opp et fortegnsskjema for f', eller ved å bruke annenderiverttesten (Teorem 5, s.204 i Bittinger).

$f(x) = x + 2x^{-1}$. Det gir $f'(x) = 1 - 2x^{-2}$ og $f''(x) = (-2)(-2)x^{-3} = 4x^{-3}$. Da er $f''(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^{-3} > 0$, og derfor er $f(\sqrt{2})$ er relativt minimum for f.

Riktig svar: **(a)**

Oppgave 7. (Siden f er en kontinuerlig funksjon i det lukkede intervallet $[-1, 3]$, vet vi at f *har* absolutte maksimums- og minimumsverdier der (Teorem 7, s.236 i Bittinger).)

For å finne disse verdiene finner vi først de kritiske punktene til f. Vi setter

$$f'(x) = 3x^2 - 2\frac{9}{2}x + 6 = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2) = 3(x-2)(x-1) = 0.$$

Da får vi kritiske punkt $x = 1$ og $x = 2$. For å finne absolutt maksimum og minimum, må vi sjekke $f(1)$ og $f(2)$ og *dessuten* $f(-1)$ og $f(3)$ (intervallendepunktene). Vi får

$$f(-1) = -15,5, \quad f(1) = -1,5, \quad f(2) = -2 \ \text{ og } f(3) = 0,5.$$

Derfor: f har absolutt minimum $f(-1) = -15,5$ og absolutt maksimum $f(3) = 0,5$. (Merk at i dette tilfellet forekommer begge de absolutte ekstremalverdiene i intervallendepunktene.)

Riktig svar: **(a)**

Oppgave 8. Hvis N er mengden av stoffet, har vi $\frac{dN}{dt} = -0,06N$, og dermed $N(t) = N_0e^{-kt} = N_0e^{-0,06t}$, altså $k = 0,06$. Halveringstiden T er da (Teorem 11, s. 334 i Bittinger) gitt ved:

$$kT = 0,06T = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0,06} \approx 11,55.$$

Riktig svar: **(a)**

Oppgave 9. For å finne denne grenseverdien skriver vi om uttrykket (bruk konjugatsetningen/3. kvadratsetning):

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to -5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = \lim_{x\to -5} x + 5 = -5 + 5 = 0.$$

Riktig svar: **(d)**

Oppgave 10. Husk kvotientregelen, som sier at hvis $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, så er

$$f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}.$$

Vi får da:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+5) - (x-3) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2 + 5 - 2x^2 + 6x}{(x^2+5)^2} = \frac{5 + 6x - x^2}{(x^2+5)^2}.$$

Riktig svar: **(c)**

Oppgave 11. For å løse denne oppgaven må vi gjøre to ting: *Først* må vi finne konstanten k, og deretter finne $P(2)$.

Fordoblingstiden $T = 10$ år, så k tilfredsstiller (Teorem 10, s. 322)

$$kT = k10 = \ln 2 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0,0693.$$

Da er altså $P(t) = 2000e^{0,0693t}$. Så etter 2 år bor det omtrent

$$P(2) = 2000e^{0,0693 \cdot 2} \approx 2297,329 \approx 2297$$

mennesker i byen.

Riktig svar: **(a)**

Om en bruker $k \approx 0,069$ her, vil en få at det bor ca. $2295,95 \approx 2296$ mennesker i byen. (Som jo også er omtrent 2297.)

Oppgave 12. $7x^4 - 3x + 2$ er en kontinuerlig funksjon, så

$$\lim_{x \to -1} (7x^4 - 3x + 2) = 7(-1)^4 - 3(-1) + 2 = 7 + 3 + 2 = 12.$$

Riktig svar: **(c)**