

Zermelo-Fraenkels mengdeteori.

1. Språket.

Språket består som alle formelle språk av termer og formler.

De enkleste termene er variable, som f.eks. $x, y, z, \dots, a, b, c, \dots, A, B, C, \dots, x_1, x_2, x_3, \dots$

De enkleste formlene er atomære. Det er kun to typer, nemlig $t_1 \in t_2$ og $t_1 = t_2$, der t_1 og t_2 betegner vilkårlige termer.

Formler generelt bygges opp som følger:

Dersom F og G er formler og x er en vilkårlig variabel, så er også følgende uttrykk formler, og andre formler finnes ikke. (see kap 1. Induktiv definisjon)

$\neg F$	Sann nøyaktig når F er usann.
$(F \wedge G)$	Sann når både F og G er sanne.
$(F \vee G)$	Sann når F eller G eller begge er sanne.
$(F \Rightarrow G)$	Usann nøyaktig i de tilfellene hvor F er sann og G er usann.
$(F \Leftrightarrow G)$	Sann nøyaktig i de tilfellene hvor F og G har samme sannhetsverdi.
$\forall x F$	Sann når F er sann for alle "mengder" x .
$\exists x F$	Sann dersom det finnes en "mengde" x , som gjør at F blir sann.

Mer kompliserte termer kan bygges opp ved hjelp av mengdebygger symbolene "{" og "}" som følger:

Dersom t_1, t_2, t_3 , etc. er termer og F er en formel, så er også følgende uttrykk termer, og andre termer finnes ikke. (see kap 1. Induktiv definisjon)

$\{t_1\}, \{t_1, t_2\}, \{t_1, t_2, t_3\},$ e.t.c.

$\{x \mid F\}$ Formelen kan godt inneholde frie variable utenom x . Se definisjon 5.

Noen termer kan være ganske kompliserte, men allikevel ha en ganske enkel betydning og være hyppig brukt. Det samme gjelder formler. Dersom dette er tilfellet så innfører vi forkortelser, det vil si nye symbol, ved hjelp av definisjoner. Definisjonene kan betraktes som nye aksiomer i et utvidet språk.

De tre første definisjonene under er eksempler på ofte brukte formler. Definisjonene 4 - 11 er ofte brukte termer. At disse termene eksisterer er rett og slett noen av aksiomene i ZF.

Definisjon 1 *Relativ kvantisering.*

$$\forall(y \in a)F \Leftrightarrow \forall y(y \in a \Rightarrow F) \quad \text{og} \quad \exists(y \in a)F \Leftrightarrow \exists y(y \in a \wedge F)$$

Definisjon 2 *Negasjon.* $x \notin y \Leftrightarrow \neg(x \in y)$ og $x \neq y \Leftrightarrow \neg(x = y)$

Definisjon 3 *Undermengde.* $a \subseteq b \Leftrightarrow \forall(x \in a) x \in b$

Definisjon 4 *Den tomme mengden.* $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$

Definisjon 5 *Unionen eller foreningsmengden.* $\bigcup a = \{x \mid \exists(y \in a) x \in y\}$

Definisjon 6 *Snittet eller fellesmengden.* $\bigcap a = \{x \mid (\forall y \in a) x \in y\}$ ($a \neq \emptyset$!)

Definisjon 7 *Unionen av to.* $x \cup y = \bigcup \{x, y\}$

Definisjon 8 *Snittet av to.* $x \cap y = \bigcap \{x, y\}$

Definisjon 9 *Differansemengden.* $a - b = \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$

Definisjon 10 *Potensmengden.* $P(x) = 2^x = \{y \mid y \subseteq x\}$

Definisjon 11 *Efterfølgermengden.* $x' = x \cup \{x\}$

2. **Aksiomene.** (De norske navnene er Thorvald Skolem sine.)

1. **Bestemthetsaksiomet.** (*Axiom of extensionality*)

$$\forall x(x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Rightarrow a = b.$$

2. **Aksiomet for uordnet par.** (*Axiom of the unordered pair*)

$$\exists x \forall y(y \in x \Leftrightarrow (y = a \vee y = b)).$$

3. **Foreningsmengdeaksiomet.** (*Axiom of the sum set*)

$$\exists x \forall y(y \in x \Leftrightarrow \exists(z \in a)(y \in z)).$$

4. **Potensmengdeaksiomet.** (*Axiom of the power set*)

$$\exists x \forall y(y \in x \Leftrightarrow y \subseteq a).$$

5. **Aksiomet for den tomme mengden.** (*Axiom of the empty set*)

$$\exists x \forall y(y \notin x).$$

6. **Uendelighetsaksiomet.** (*Axiom of infinity*)

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall(y \in x)(y' \in x)).$$

7. **Utsondringsaksiomet.** (*Axiom of subsets or axiom of separation*)

$$\exists x \forall y(y \in x \Leftrightarrow (y \in a \wedge F)).$$

Dette er ikke bare én formel, men en formel for enhver formel F , og dette aksiomet gjør det mulig å bruke termen $\{x \mid (y \in a \wedge F)\}$ for enhver formel F .

8. **Tilordningsaksiomet.** (*Axiom of replacement or axiom of collection*)

$$\exists x \left(\forall y \forall z \forall z' (F(y, z) \wedge F(y, z') \Rightarrow z = z') \Rightarrow \forall(y \in a)(\exists z F(y, z) \Rightarrow \exists(z \in x) F(y, z)) \right).$$

Dette er også en formel for enhver formel F som har frie forekomster av variablene y og z . Betegnelsen $F(y, z)$ indikerer at variablene y og z forekommer fritt i F .

9. **Regulæritetsaksiomet.** (*Axiom of foundation or axiom of regularity*)

$$x \neq \emptyset \Rightarrow \exists(y \in x)(x \cap y = \emptyset).$$

10. **Utvalgsaksiomet.** (*Axiom of choice*)

Aksiomet sier at det for alle mengder av ikketomme mengder alltid finnes en utvalgsfunksjon. For å formulere det forståelig behøver vi flere forkortelser.

Systemet med aksiomene 1 til 9 med unntak av 8 kalles Zermelos teori. Tar vi med alle aksiomene fra 1 til og med 9 får vi Zermelo - Fraenkels mengdeteori ZF. Tar vi med aksiom 10 kalles teorien ZFC.

Oppgave 1.

La a og b være mengder og sett $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Beregn følgende mengder:

- (a) $\bigcup x$.
- (b) $\bigcap x$.
- (c) $\bigcup \bigcup x$.
- (d) $\bigcap \bigcup x$.
- (e) $\bigcup \bigcap x$.
- (f) $\bigcup \bigcap x - \bigcap \bigcup x$.
- (g) $\bigcup \bigcup x - (\bigcup \bigcap x - \bigcap \bigcup x)$.

Vis at dersom $x = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $y = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ og $x = y$, så er $a = c$ og $b = d$.

- Definisjon 12** *Ordnet par.* (term)
 $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$
- Definisjon 13** *Ordnet par.* (formel)
 $\text{Ordnetpar}(x) \Leftrightarrow \exists a \exists b (x = (a, b)).$

Løsning oppgave 1.

Vi definerer to nye termer,

- Definisjon 14** $\text{pr}_1(x) = \bigcup \bigcap x.$
- Definisjon 15** $\text{pr}_2(x) = \bigcup \bigcup x - (\bigcup \bigcap x - \bigcap \bigcup x).$

Utregning viser at $a = \text{pr}_1(x)$, $b = \text{pr}_2(x)$, $c = \text{pr}_1(y)$ og $d = \text{pr}_2(y)$.

Fra likhetsaksiomene følger siden $x = y$ at $\text{pr}_1(x) = \text{pr}_1(y)$ og $\text{pr}_2(x) = \text{pr}_2(y)$. Følgelig $a = c$ og $b = d$. $\square$

- Definisjon 16** *Relasjon.* (formel)
 $\text{Relasjon}(x) \Leftrightarrow \forall u (u \in x \Rightarrow \text{Ordnetpar}(u)).$
- Definisjon 17** *Invers relasjon.* (term)
 $r^{-1} = \{x \mid x = (u, v) \wedge (v, u) \in r\}.$
- Definisjon 18** *Funksjon.* (formel)
 $\text{Funksjon}(x) \Leftrightarrow (\text{Relasjon}(x) \wedge \forall (u \in x) \forall (v \in x) (\text{pr}_1(u) = \text{pr}_1(v) \Rightarrow \text{pr}_2(u) = \text{pr}_2(v))).$
- Definisjon 19** *Domene.* (term)
 $\text{dom}(x) = \{u \mid \exists (v \in x) u = \text{pr}_1(v)\}.$
- Definisjon 20** *Rekkevidde.* (term)
 $\text{rg}(x) = \{u \mid \exists (v \in x) u = \text{pr}_2(v)\}.$
- Definisjon 21** *Funksjonsverdi.* (term)
 $x(u) = \bigcap \{v \mid (u, v) \in x\}.$
- Definisjon 22** *Restriksjon.* (term)
 $x \upharpoonright u = \{v \mid v \in x \wedge \text{pr}_1(v) \in u\}.$

10. Utvalgsaksiomet. (*Axiom of choice*)

$$(\emptyset \notin x) \Rightarrow \exists y (\text{Funksjon}(y) \wedge (\text{dom}(y) = x) \wedge \forall (u \in x) y(u) \in u).$$