Oppfriskningskurs i matematikk 2007

Marte Pernille Hatlo
Institutt for matematiske fag, NTNU

6.-11. august 2007

Velkommen!

NTNU
Det skapende universitet

Temaer

- Algebra
- Trigonometri
- Funksjoner og derivasjon
- Integrasjon
- Eksponensial- og logaritmefunksjoner
- Vektorregning - og en liten prøve

NTNU
Det skapende universitet

Multiplikasjon og potenser

Skrivemåte

$$3a = 3 \cdot a \qquad ab = a \cdot b$$

Potenser:

$$a^p \cdot a^q = a^{p+q} \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q} \qquad a \neq 0$$

$$a^0 = 1 \qquad a^{-p} = \frac{1}{a^p} \qquad a \neq 0$$

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = a^p \cdot b^{-p} \qquad b \neq 0$$

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q} \qquad (a, b, p, q \in \mathbb{R})$$

NTNU
Det skapende universitet

Kvadratrot og n-terot

Oppsplitting

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad b \neq 0$$

$$(a, b \geq 0, \quad n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}).$$

NTNU
Det skapende universitet

Kvadrat- og konjugatsetning

Lær å bruke disse begge veier!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

NTNU
Det skapende universitet

Brøkregning

Sette på en brøkstrek

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad c \neq 0$$

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c} \qquad c \neq 0$$

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a \cdot b}{c \cdot d} \qquad c, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \qquad c, b, d \neq 0.$$

NTNU
Det skapende universitet

Flere regneregler

Gange og forkorte i en brøk

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \qquad b, c \neq 0.$$

Gange inn og trekke ut parenteser

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

Likningsregler

Man kan

- Multiplisere hvert **ledd** i likningen med samme tall (ikke null).
- Addere hver **side** i likningen med samme tall.

Lineære likningssett

Tegn figur!

$$y = ax + b$$
$$y = cx + d$$

Mulige situasjoner:

- En løsning
- Ingen løsninger
- Uendelig mange løsninger

Ulikheter

Hvis a ligger til venstre for b på tallinja

$$a < b$$

Legge til og multiplisere

$$a + c < b + c$$

$$a - c < b - c$$

$$a \cdot c < b \cdot c \quad \text{Hvis } c > 0$$

$$a \cdot c > b \cdot c \quad \text{Hvis } c < 0$$

NTNU
Det skapende universitet

Absoluttverdi

Definisjon

Absoluttverdien av et tall sier hvor langt tallet står fra 0.

Regneeksempler

Oppgave 1

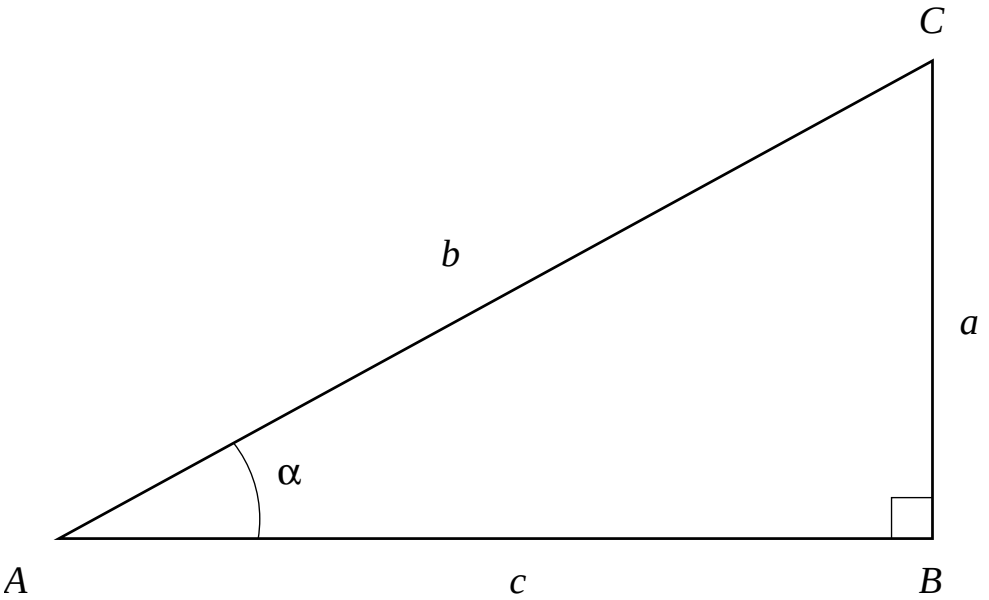
Finn likning for en sirkel med radius 5 og sentrum i punktet $(-3, 4)$.

Oppgave 2

Finn sentrum og radius til sirkelen beskrevet av likningen

$$x^2 - 8x + y^2 + 6y + 21 = 0.$$

Trekanten



Navn på sidene:

b: Hypotenus

a: Motstående katet til A

c: Hosliggende katet til A

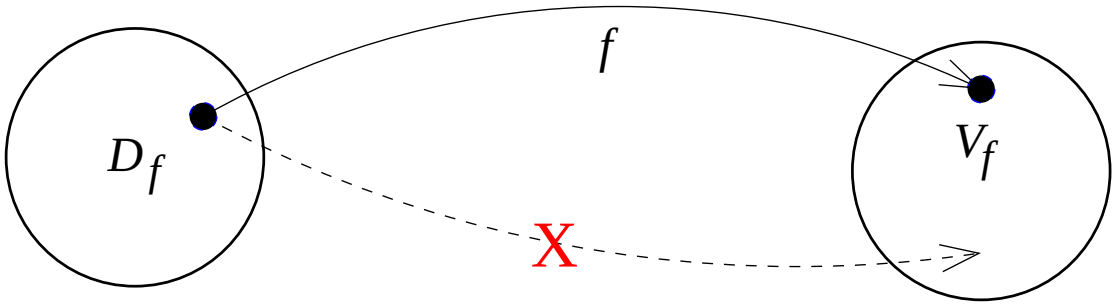
Regneregel

Sum og differanse av vinkler

$$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$$
$$\cos(u-v) = \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v$$
$$\sin(u+v) = \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v$$
$$\sin(u-v) = \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v$$

Funksjon





Definisjonsmengde

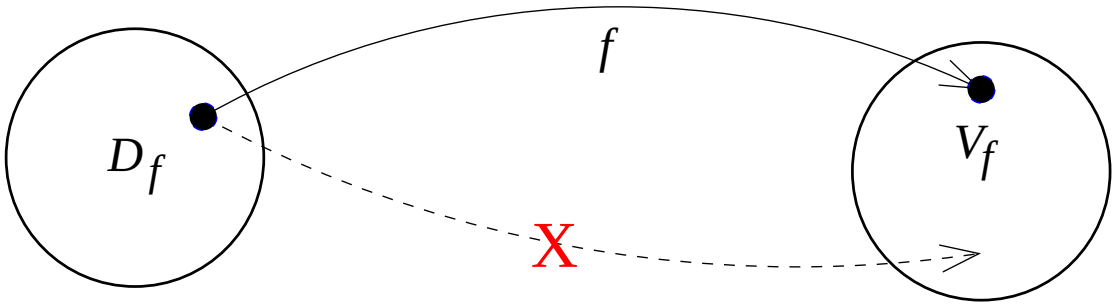
Alle verdier som x kan ha.

Verdimengde

Alle verdier som $f(x)$ kan ha.

Funksjon





En-til-en

Når en funksjon er gitt, vil det til hvert element i definisjonsmengden svare til **ett og bare ett** element i verdimengden.

Funksjonsdrøfting

Nullpunkt

Dersom $f(x)$ er null for $x = a$, sier vi at $(a, 0)$ er et nullpunkt.

Funksjonsdrøfting

Grenseverdi

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f(1{,}9) = 3{,}6100 \qquad f(2{,}1) = 4{,}4100$$

$$f(1{,}99) = 3{,}9601 \qquad f(2{,}01) = 4{,}0401$$

$$f(1{,}999) = 3{,}9960 \qquad f(2{,}001) = 4{,}0040$$

$$f(1{,}9999) = 3{,}9996 \qquad f(2{,}0001) = 4{,}0004$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

NTNU
Det skapende universitet

Funksjonsdrøfting

Den deriverte

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$f'(x) > 0$: Grafen stiger mot høyre.
$f'(x) < 0$: Grafen synker mot høyre.
$f'(x) = 0$: Mulig topp- eller bunnpunkt.

$f'(x_0)$: Hvor raskt funksjonen vokser i punktet x_0.

Noen deriverte

$f(x)$	$f'(x)$	
x^r	$r \cdot x^{r-1}$	$r \in \mathbb{R}$
c	0	($c =$ konstant)
$g(u)$	$g'(u)u'$	(u er funksjon av x)
$u + v$	$u' + v'$	(v er funksjon av x)
$u \cdot v$	$u' \cdot v + u \cdot v'$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	

NTNU
Det skapende universitet

Funksjonsdrøfting

Sentrale punkter:

- Definisjonsmengde og verdimengde
- Nullpunkt
- Topp- og bunnpunkt
- Fortegnsskjemaer
- Vendepunkt
- Asymptoter
- Figur

NTNU
Det skapende universitet

Integralregning

Noen spesielle ubestemte integraler

$$\int k\,dx = kx + C \qquad k = \text{konstant}$$

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C \qquad r \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

NTNU
Det skapende universitet

Integralregning

Setninger om integraler

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

NTNU
Det skapende universitet

Integralregning

Arealer

Dersom $f(x) \geq 0$ i intervallet $[a, b]$, så er arealet A mellom x-aksen og grafen fra a til b gitt ved

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Dersom $f(x) \leq 0$ i intervallet $[a, b]$, så er arealet A mellom x-aksen og grafen fra a til b gitt ved

$$A = -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx.$$

Regneeksempler

Oppgave 1

Finn arealet mellom x-aksen og kurven $f(x) = \sin x$ i intervallet

a) $[0, \pi]$

b) $[0, 2\pi]$

Oppgave 2

Finn arealet som er avgrenset av (ligger mellom) kurvene

$f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

NTNU
Det skapende universitet

Integralregning

Integrasjon ved substitusjon

Ubestemte integraler på formen

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$$

kan vi regne ut ved substitusjonen $u = g(x)$. Da får vi

$$du = g'(x)dx.$$

Integralet blir forenklet slik

$$\int f((g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du.$$

NTNU
Det skapende universitet

Potenser og logaritmer

Definisjon

$$\log 10^a = a$$

$$10^{\log a} = a, \qquad a > 0.$$

Regneregler

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \qquad a, b > 0$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

$$\log(a^t) = t \cdot \log a$$

NTNU
Det skapende universitet

Potenser og logaritmer

Likhet / ulikhet

Hvis $a = b$ $(a, b > 0)$ så er

$$\log a = \log b$$
$$10^a = 10^b.$$

Hvis $a < b$ $(a, b > 0)$ så er

$$\log a < \log b$$
$$10^a < 10^b.$$

NTNU
Det skapende universitet

Potenser og naturlige logaritmer

Definisjon

$$\ln e^a = a$$

$$e^{\ln a} = a, \qquad a > 0.$$

Regneregler

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b, \qquad a, b > 0$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^t) = t \cdot \ln a$$

NTNU
Det skapende universitet

Potenser og naturlige logaritmer

Likhet / ulikhet

Hvis $a = b$ $(a, b > 0)$ så er

$$\ln a = \ln b$$
$$e^a = e^b.$$

Hvis $a < b$ $(a, b > 0)$ så er

$$\ln a < \ln b$$
$$e^a < e^b.$$

NTNU
Det skapende universitet

Logaritmeregning

Derivasjonsregler

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \log e$$

$$f(x) = e^{u(x)} \qquad f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x).$$