75800 Prosjekt 2

Goodwillie Calculus

Per Røe

13. juni 2000

Veileder: Bjørn I. Dundas
Institutt for matematiske fag

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

Innhold

1 Innledning **1**

2 Kuber **2**
2.1 Generelt om kuber 2
2.2 Pushout- og pullback-kuber 3
2.3 Pushout-kuber for ordnede mengder 3

3 Krysseffekter **7**
3.1 Eilenberg og MacLanes definisjon 7
3.2 Sammenhengen mellom pushout-kuber og krysseffekter 10
3.3 Krysseffekter og taylorrekker på de reelle tall 11

4 Tensorproduktet **14**
4.1 Introduksjon 14
4.2 Krysseffekter ved tensorprodukt 16

5 Goodwillie Calculus **18**
5.1 Introduksjon 18
5.1.1 Operasjoner 18
5.1.2 Metrikk 20
5.2 Totalt fiber til en kube 21
5.3 Stabil eksisivitet 21
5.4 Krysseffekter 23
5.5 Taylor-tårnet til F 23

A Kategoriteori **25**
A.1 Introduksjon 25
A.2 Universielle morfismer 27
A.3 Abelske kategorier 29

B Homotopi **31**
B.1 Homotopi 31

C Simplisielle mengder **33**
C.1 Ordnede mengder 33
C.2 Simplisielle objekter 33
C.3 Fibrasjoner 34

Referanser **36**

1 Innledning

I sine artikler [Goo90], [Goo92] og [Goo] så Thomas G. Goodwillie på en teori, som til en stor grad oppførte seg som reell analyse. Dette har utviklet seg til et kraftfullt verktøy.

Goodwillie Calculus kan sees på som en utvidelse av krysseffekter til ikke abelske kategorier. I denne oppgaven har jeg spesielt sett på kategorien av punkterte topologiske rom, men de samme prinsippene fungerer i en stor klasse av lignende kategorier.

Krysseffekter har en nær sammenheng med kuber, og da spesielt pushout- og pullback-kuber. Derfor har jeg begynt oppgaven med å innføre en formalisme for kuber, samt å se litt på forskjellige typer av pushout og pullback-kuber.

Videre har jeg gått igjennom den klassiske definisjonen på krysseffekter som Eilenberg og MacLane kom med i [EM54]. Her har jeg også forsøkt å knytte krysseffekter opp mot itererte kjerner til en kube.

Videre har jeg regnet krysseffektene i et par eksempler. Det kanskje viktigste eksempelet er krysseffektene på de reelle tall, siden fremgangsmåten her ligner meget på den fremgangsmåten som jeg bruker i kapittelet om Goodwillie Calculus. Jeg har også fått et utrykk for Taylor-rekken til en funksjon fra disse krysseffektene.

Deretter ser jeg på Goodwillie Calculus i samme settingen. Her begynner jeg med å gi analoger til regneoperasjoner på de reelle tall og jeg definerer en "metrikk" som bygger på sammenhengsgrad. Videre kommer jeg frem til et uttrykk for krysseffektene og på tilsvarende måte som for de reelle tall får vi et "Taylor-tårn" for en funktor $F : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op_*$. Her er $\mathcal{T}op_*$ kategorien av punkterte topologiske rom.

2 Kuber

En stor del av oppgaven vil handle om kommutative diagrammer i form av kuber og spesielt pushout- og pullback-kuber av forskjellige slag. Derfor vil jeg først se litt generelt på kuber.

2.1 Generelt om kuber

Definisjon 2.1 (Kuber) La S være en endelig mengde og la $\mathcal{P}(S)$ være potensmengdenkategorien til S, altså kategorien hvor objektene er delmengdene til S hvor morfismene er inklusjoner. En kube er da gitt som en funktor $\mathfrak{X}$ fra $\mathcal{P}(S)$ og inn i en kategori $\mathcal{C}$. Vi sier at $\mathfrak{X}$ er en S-kube eller en n-kube hvis kardinaliteten $|S| = n$.

På denne måten vil 0-kuber tilsvare objekter i kategorien $\mathcal{C}$ og 1-kuber morfismer. En n-kube kan sees på som en avbildning mellom to $(n-1)$-kuber. Dette kan gjøres på n forskjellige måter. Mer generelt kan en T-kube av U-kuber sees på som en S-kube hvor S er den disjunkte unionen til T og U.

Eksempel 2.2 (3-kube) Vi lar $S = \{1, 2, 3\}$. For en $T \in \mathcal{P}(S)$ skriver vi $\mathfrak{X}(T) = X_T$. Vi får da følgende 3-kube:

$$\begin{tikzcd}
 & X_\emptyset \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_{\{1\}} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_{\{2\}} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{\{1,2\}} \arrow[dd] & \\
 & X_{\{3\}} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{\{1,3\}} \arrow[dl] \\
X_{\{2,3\}} \arrow[rr] & & X_{\{1,2,3\}} &
\end{tikzcd}$$

Denne kuben kan også sees på som en avbildning mellom 2 kvadrater (2-kuber):

$$\begin{tikzcd}
X_\emptyset \arrow[r] \arrow[d] & X_{\{1\}} \arrow[d] \\
X_{\{2\}} \arrow[r] & X_{\{1,2\}}
\end{tikzcd}
\quad \text{og} \quad
\begin{tikzcd}
X_{\{3\}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\{1,3\}} \arrow[d] \\
X_{\{2,3\}} \arrow[r] & X_{\{1,2,3\}}
\end{tikzcd}$$

Begge disse kubene er avbilidninger fra potensmengdene til $\{1, 2\}$. I det andre kvadratet er funktoren $\mathfrak{Y}$ gitt ved $\mathfrak{Y}(T) = X_{T \cup \{3\}}, T \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$

2.2 Pushout- og pullback-kuber

På tilsvarende vis som vi kan definerer pushout- og pullback-kvadrater kan vi også definere pushout- og pullback-kuber. Pushoutkuber blir også kalt kokartesiske kuber, mens pullback-kuber også kalles kartesiske kuber.

Vi lar indekskategorien $\mathcal{I}$ være potensmengdekategorien til S, men hvor vi ikke har med det finale objektet S. En funktor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ vil da være en n-kube hvor det finale objektet mangler. Kogrensen til F blir da pushouten på samme måte som i pushout-kvadrater.

Dualt er en pullback-kube en n-kube hvor det initielle objektet er grensen til funktoren $G : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Her er indekskategorien $\mathcal{J}$ potensmengdekategorien til S hvor vi har tatt vekk det initielle objektet $\emptyset$.

En *sterkt kokartesisk kube* er en pushoutkube hvor også alle underkuber er pushoutkuber. Tilsvarende er en *sterkt kartesisk* kube en pullback-kube hvor også alle underkuber er pullback-kuber.

Hvis vi tar homotopi-kogrensen til F i stedet for den vanlige kogrensen får vi en homotopi-kokartesisk kube. Tilsvarende får vi en homotopi-kartesisk kube ved å ta homotopi-grensen til G i stedet for den vanlige grensen.

Detaljene ved homotopi-grenser og -kogrenser ligger utenfor denne oppgaven, men i de fleste interessante kategorier kan vi bruke følgende prosedyre:

- For å finne homotopi-pushouten byttes det initielle objektet ut med et ekvivalent kofibrant objekt, mens alle avbildningene byttes ut med ekvivalente kofibrasjoner. Deretter tar vi den vanlige kogrensen.

- For å finne homotopi-pullbacken byttes det finale objektet ut med et ekvivalent fibrant objekt, og alle avbildningene byttes ut med de ekvivalente fibrasjonene. Deretter tar vi den vanlige grensen.

2.3 Pushout-kuber for ordnede mengder

I det følgende avsnittet skal vi se på for hvilke diagram en pushoutkube eksisterer i kategorien av ordnede mengder.

Torbjørn Helvik har i sitt prosjekt [Hel00], sett på hvilke krav som vi må stille for at det skal finnes et pushout-kvadrat. Her vil jeg prøve å genrralisere dette til 3 dimensjoner.

Vi lar $\mathfrak{X}$ være følgende 3-kube hvor det finale objektet $\mathfrak{X}(\{123\})$ er fjernet:

$$\begin{tikzcd}
& X_0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_1 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{12} \arrow[dd, dashed] & \\
& X_3 \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{13} \arrow[dl, dashed] \\
X_{23} \arrow[rr, dashed] & & X_{123} &
\end{tikzcd}$$

Hvis en pushout X_{123} eksisterer vil den være på formen:

$$X_{123} = X_{12} \coprod X_{13} \coprod X_{23}/\sim \tag{1}$$

Her er $\sim$ en ekvivalensrelasjon som vi vil definere senere, men som kort fortalt sier at to elementer er ekvivalente hvis de blir truffet av samme element i X_i.

Vi kaller avbildningen fra X_0 til X_1 for f_1, avbildningen fra X_0 til X_2 for f_2, avbildningen fra X_1 til X_{12} for f_{1-12} og så videre.

Vi definerer følgende ekvivalensrelasjon $\sim_1$ på $X_1 \coprod X_2 \coprod X_3$:

- For det første har vi at to element er ekvivalente hvis de avbildes på samme element:

$$f_{i-ij}(x_i) = f_{j-ij}(x_j) \Rightarrow x_i \sim_1 x_j$$

- De neste to punktene er eksempler hvor x_i, x_j og x_k ikke kan ordnes.

$$\begin{gathered}
x_i \sim_1 x_j \\
f_{i-ik}(x_i) < f_{k-ik}(x_k) \\
f_{j-jk}(x_j) > f_{k-jk}(x_k) \\
\Downarrow \\
x_k \sim_1 x_i \sim_1 x_j
\end{gathered}$$

-

$$\begin{gathered}
f_{i-ij}(x_i) < f_{j-ij}(x_j) \\
f_{j-jk}(x_j) < f_{k-jk}(x_k) \\
f_{i-ik}(x_i) < f_{k-ik}(x_k) \\
\Downarrow \\
x_i \sim_1 x_j \sim_1 x_k
\end{gathered}$$

- Vi vil også ha med transitivitet:

$$x_i \sim_1 x_j,\ x_j \sim_1 x_k \Rightarrow x_i \sim_1 x_k$$

Her er $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, og $x_i \in X_i,\ x_j \in X_j$ og $x_k \in X_k$.

Vi vil nå se på mengden $P_{123} = X_1 \coprod X_2 \coprod X_3 / \sim_1$ som vil vise seg å være pushouten til diagrammet over hvis alle f_{i-ij} er injektive. Videre vil $[x_i] \in P_{123}$ tilsvare ekvivalensklassen til $x_i \in X_1 \coprod X_2 \coprod X_3$.

Først vil definere en operator $<$ på P_{123}:

$$f(x_i) < f(x_j),\ x_i \nsim_1 x_j \Rightarrow [x_i] < [x_j]$$

Proposisjon 2.3 *$<$ gir en entydig ordning på P_{123}.*

Teorem 2.4 *Hvis f_{i-ij} er injektiv for alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ eksisterer det en pushout for den ovenstående kuben. Denne pushouten er isomorf med $X_1 \coprod X_2 \coprod X_3 / \sim_1$.*

Bevis: Antar at vi har en avbildning:

$$\begin{tikzcd}
 & X_0 \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X_1 \arrow[dl] \arrow[dd] \\
X_2 \arrow[rr] \arrow[dd] & & X_{12} \arrow[dd, dashed] & \\
 & X_3 \arrow[rr] \arrow[dl] & & X_{13} \arrow[dl, dashed] \\
X_{23} \arrow[rr, dashed] & & Y &
\end{tikzcd}$$

Da vil alle elementer som er ekvivalente under $\sim_1$ måtte avbildes på samme elementet i Y. Hvis ikke dette er oppfyllt klarer vi ikke å oppfylle kravet om at diagrammet skal kommutere og at alle avbildningene skal være ordningsbevarende.

Dermed vil vi ha gitt en entydig avbildning fra $X_1 \coprod X_2 \coprod X_3 / \sim_1$ og inn i Y. $\square$

Vi kaller elementene i P_{123} for $\{\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n\}$. elementene i den X_{ij}-en som vi ser på for $\{y_1 < y_2 < \cdots < y_m$. Videre vil vi definere en ekvivalensrelasjon $\sim_2$ på $X_{12} \coprod X_{13} \coprod X_{23}$:

$$x_i \sim_1 x_j \Rightarrow f_{i-ij}(x_i) \sim_2 f_{j-ij}(x_j)$$
$$y_i \sim_2 y_j \Rightarrow y_i \sim_2 y_{i+1} \sim_2 \cdots \sim_2 y_{j-1} \sim_2 y_j$$

Vi definerer så $X^*_{123} = X_{12} \coprod X_{13} \coprod X_{23}/\sim_2$. Vi har da følgende inklusjon:

$$P_{123} \xhookrightarrow{t} X^*_{123}$$

Definisjon 2.5 Vi sier at en av mengdene $X_{ij} = \{y_1 < y_2 < \cdots < y_m\}$ har en utvidelse på plass k dersom vi har $[y_l] = t(\alpha_k)$ og $[y_{l+1}] \notin t[P_{123}]$ for $k \in \{0, 1, \ldots n\}$. En utvidelse på plass 0 betyr at $[y_0] \notin t[P_{123}]$.

Teorem 2.6 *En pushout eksisterer for diagrammet 2.3 dersom:*

1. *Maksimalt en av X_{ij}-ene har en utvidelse på plass k for alle $k \in \{0, \ldots, n\}$.*
2. *Hvis X_{ij} har en utvidelse på plass k må det finnes en $y_l \in X_{ij}$ slik at $[y_l] = t(\alpha_{k+1})$.*

Dersom denne pushouten eksisterer er den gitt ved $X_{12} \coprod X_{13} \coprod X_{23}/\sim_2$

Bevis: Krav 1 og 2 er akkurat det som må tilfredstilles for at vi skal ha en ordning på X^*_{123}. Hvis krav 1 ikke er oppfyllt har vi ingen ordning av elementene i de to utvidelsene. Hvis krav 2 ikke er oppfyllt vet vi ikke om elementene i utvidelsen skal avbildes på et element før eller etter det elementet som tilsvarer α_{k+1}.

Kaller elementene i utvidelsen $y_g < \cdots < y_h$ Hvis krav 1 og 2 er oppfyllt har vi da følgende ordning: $t(\alpha_k) < [y_g] < \cdots < [y_h] < t(\alpha_{k+1})$. □

3 Krysseffekter

Begrepet krysseffekter stammer fra Eilenberg og MacLane som bruker det i artikkelen "On the groups $H(\Pi, n)$, II" ([EM54]). Her defineres krysseffekter for abelske grupper og andre moduler over kommutative ringer. Krysseffekter brukes også av Dold og Puppe ([DP61]) i deres studier av de deriverte til ikke-additive funktorer.

3.1 Eilenberg og MacLanes definisjon

I det følgende vil jeg gi et sammendrag av Eilenberg og MacLanes definisjon av krysseffekter, men jeg vil ved en del tilfeller benytte moderne notasjon i stedet for notasjonen i artikkelen.

Avvik

Eilenberg og Mac Lane begynner med å definere avviket til en avbildning f fra en assosiativ multiplikativ struktur til en abelsk gruppe.

Vi lar C være en struktur med en assosiativ binær relasjon, som vi videre vil kalle multiplikasjon. Videre lar vi $\mathbb{Z}C$ være den frie abelske gruppen over C. Vi har da definert addisjon og multiplikasjon på $\mathbb{Z}C$.

Addisjon gjøres ved at man for hvert element c i C legger i sammen faktorene foran c:

$$\sum_{c\in C} m_c c + \sum_{c\in C} n_c c = \sum_{c\in C} (m_c + n_c)c \qquad m_c, n_c \in \mathbb{Z}$$

Multiplikasjon for vi fra multiplikasjon på de hele tallene sammen med multiplikasjonen i C:

$$n_1 c_1 \cdot n_2 c_2 = (n_1 \cdot n_2)(c_1 \cdot c_2), \qquad n_1, n_2 \in \mathbb{Z},\ c_1, c_2 \in C$$

Vi definerer følgende komposisjon i $\mathbb{Z}C$ ved

$$a \top b = ab - a - b, \qquad a, b \in C \tag{2}$$

og distrubitivitet.

La G være en abelsk gruppe og $f : C \to G$. Da kan vi utvide f til $\mathbb{Z}C \to G$ ved å sette

$$f(\sum_{c\in C} m_c c) = \sum_{c\in C} m_c f(c)$$

Dermed får vi fra (2)

$$f(a \top b) = f(ab) - f(a) - f(b) \tag{3}$$

Videre vil vi kalle $f(a \top b) : C \times C \to G$ avviket til f. Som vi ser er avviket null hvis og bare hvis f er en homomorfisme.

Likeledes kan det n-te avviket til f defineres ved

$$f(c_1 \top \cdots \top c_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(c_{i_1} \cdots c_{i_n}), \qquad c_i \in C \tag{4}$$

hvor vi får hver k summerer over alle ordnede undermengder $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{1, 2, ...n\}$ med k elementer.

Ved induksjon kan det lett vises at følgende formel gjelder:

$$f(c_1 \cdots c_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(c_{i_1}) \top \cdots \top f(c_{i_k}) \tag{5}$$

Krysseffektfunktoren

Vi lar nå T være en vanlig kovariant funktor fra kategorien av abelske grupper $\mathcal{A}$ og inn i seg selv. Eilenberg og MacLane så kun på avbildninger mellom abelske grupper, og mellom moduler over kommutative ringer, men resultatene deres stemmer også generelt for abelske kategorier. Vi antar videre at $T0 = 0$, hvor 0 er nullelementet i kategorien.

Hvis T ikke er additiv vil avviket for to avbildinger $f, g : A \to B$

$$T(f \top g) = T(f + g) - Tf - Tg$$

ikke være lik null. Hvis vi ser på T som en avbildning mellom de to gruppene $C = \mathcal{A}(A, B)$ og $G = \mathcal{A}(T(A), T(B))$, ser vi at den ovenstående ligningen er nøyaktig det samme som ligning (3). Vi kan også definere høyere-ordens avvik på tilsvarende vis som i ligning (4).

La $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$ være den direkte summen av k abelske grupper. Da definerer vi endomorfismen $\psi_i : A \to A$ for $a_i \in A_i$ ved

$$\psi_i(a_1, \ldots, a_k) = (0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots, 0), \quad i = 1 \ldots k. \tag{6}$$

Den k-te krysseffekt funktoren er da en funktor fra k abelske grupper $A_1, \ldots, A_k$. Objektfunksjonen $T(A_1| \ldots |A_k)$ er da definert som

$$T(A_1| \ldots |A_k) = T(\psi_1 \top \cdots \top \psi_k) T(A) \tag{7}$$

Morfismefunksjonen $T(f_1| \ldots |f_k)$ er definert som for $f_i : A_i \to B_i$ som homomorfismen

$$T(f_1| \ldots |f_k) : T(A_1| \ldots |A_k) \to T(B_1| \ldots |B_k) \tag{8}$$

indusert ved $f = f_1 \times \cdots \times f_k : A_1 \oplus \cdots \oplus A_k \to B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$.

Siden A er en direkte sum tilfredstiller ψ_i-ene følgende relasjoner

$$\psi_i \psi_i = \psi_i, \quad \psi_i \psi_j = 0, \ i \neq j, \quad \psi_1 \times \cdots \times \psi_k = 1_A$$

hvor 1_A er identitetsavblidningen til A. Videre er

$$D_\sigma = T(\psi_{\sigma_1} \top \cdots \top \psi_{\sigma_1})$$

definert for alle ikketomme delmengder $\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ av $\{1, \ldots k\}$. Den abelske gruppen

$$A^\sigma = A_{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus A_{\sigma_s}, \quad \sigma = \{\sigma_1 \ldots \sigma_k\}$$

kan sees som en direkte summand til A, det vil si at det finnes en gruppe B slik at $A = A^\sigma \oplus B$. Vi vil ha injeksjoner og projeksjoner som vi skriver som:

$$\lambda_\sigma : A^\sigma \to A, \quad p_\sigma : A \to A^\sigma.$$

En viktig egenskap ved krysseffekter er at vi kan representere $T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k)$ som en direkte sum av s-te krysseffekter for $1 \leq s \leq k$.

Teorem 3.1 *Det eksisterer en naturlig isomorfisme*

$$T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) \cong \bigoplus_\tau T(A_{\tau_1} | \cdots | A_{\tau_s})$$

Slik at for alle delmengder σ av $\{1, \ldots, n\}$ så kommuterer det følgende diagrammet:

$$\begin{array}{ccc}
T(A_1 \oplus \cdots \oplus A_k) & \cong & \bigoplus_\tau T(A_{\tau_1} | \cdots | A_{\tau_s}) \\
T(\lambda_\sigma)\uparrow \ \downarrow T(p_\sigma) & & I_\sigma \uparrow \downarrow P_\sigma \\
T(A_{\sigma_1} \oplus \cdots \oplus A_{\sigma_s}) & \cong & \bigoplus_{\tau \subseteq \sigma} T(A_{\tau_1} | \cdots | A_{\tau_s})
\end{array}$$

Her er I_σ og P_σ inklusjon og projeksjon av delsummer.

For bevis se [EM54], side 75.

For eksempel har vi:

$$\begin{aligned}
T(A \oplus B) &\cong TA \oplus TB \oplus T(A|B) \\
T(A \oplus B \oplus C) &\cong TA \oplus TB \oplus TC \oplus T(A|B) \\
&\quad \oplus T(A|C) \oplus T(B|C) \oplus T(A|B|C)
\end{aligned}$$

Definisjon 3.2 Vi sier at en funktor er av grad n dersom den n-te krysseffekten er ulik 0, mens den $(n+1)$-te krysseffekten er lik 0.

Dermed ser vi at en additiv funktor er av grad 1.

3.2 Sammenhengen mellom pushout-kuber og krysseffekter

Vi skal i dette kapitelet se at de er en nær sammenheng mellom pushoutkuber og krysseffekter. Vi vil se at kryssefektene kan representeres som itererte "differanser" eller kjerner til en pushoutkube.

Jeg vil først endre notasjon i forhold til Eilenberg og MacLane: Den n-te krysseffekten til funktoren F vil jeg kalle $L_nF(X_1, \dots, X_n)$.

Som et eksempel ser vi på $L_2(A, B)$. Vi begynner med følgende pushout-kvadrat (som også er en pullback):

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Hvis vi lar funktoren F virke på kvadratet får vi følgende kvadrat:

$$\begin{tikzcd} F(A \oplus B) \arrow[r] \arrow[d] & FB \arrow[d] \\ FA \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Vi ser at dersom F er en additiv funktor med $F0 = 0$ blir det ovenstående diagrammet et pullbackdiagram. Dette er nøyaktig de funktorene som har andre krysseffekt lik 0.

Videre kan vi beregne den n-te krysseffekten til funktoren F ved å beregne den "itererte kjernen" til den tilsvarende n-kuben. Dette kan gjøres ved hjelp av en rekursiv prosedyre. Vi lar $\mathfrak{X}$ være en n-dimensjonal sterkt kokartesisk kube konstruert ved at vi lar $S = \{1, \dots n\}$, $\mathfrak{X}(S) = 0$ og $\mathfrak{X}(T) = \bigoplus_{s \in S \setminus T} X_s$ for $T \subset S$ på tilsvarende vis som i eksempelet over. Vi tar deretter og anvender F på $\mathfrak{X}$. Hvis vi så ser på den resulterende kuben $F\mathfrak{X}$ som en avbildning mellom 2 $(n-1)$-kuber $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ vil den "itererte kjernen" $\tilde{i}\mathfrak{X}$ være kjernen til avbildningen $\tilde{i}\mathfrak{Y} \to \tilde{i}\mathfrak{Z}$.

Vi definerer operatoren $T_nF(X_0, X_1, ..., X_n)$ på følgende vis: La $\mathfrak{X}$ være den sterkt kokartesiske n-kuben hvor $\mathfrak{X}(S) = X_0$ og $\mathfrak{X}(S \setminus \{s\}) = X_s,\ s \in \{1, \dots, n\}$. Da setter vi: $T_nF(X_0, X_1, \dots, X_n) = \tilde{i}\mathfrak{X}$.

Eksempel 3.3 Som et eksempel kan vi se på $L_2F(A, B)$. Kvadratet blir da som over. Utregningene blir da som følger:

$$\begin{aligned} L_2F(A, B) &\cong \ker(T_1F(A, B \oplus A) \to L_1F(B)) \\ &\cong \ker(\ker(F(A \oplus B) \to F(A)) \to \ker(F(B) \to F(0))) \end{aligned}$$

Vi kan også se på krysseffektfunktoren som et mål på hvor langt unna funktoren er ifra å sende pullback-kuber på pullback-kuber. For en 2-kube gjelder:

$$L_2(A, B) \cong \ker(F(A \oplus B) \to F(A) \oplus F(B))$$

Generelt gjelder:

$$L_n(X_1, \ldots, X_n) = \ker(F(\bigoplus_{i=1}^{n} X_i) \underset{\leftarrow}{\to\to} \lim \mathfrak{Y})$$

Her er $\mathfrak{Y}$ n-kuben som benyttes for å beregne L_n, men hvor vi har fjernet det initielle objektet, og $\lim \mathfrak{Y}$ blir pullbacken til dette diagrammet.

3.3 Krysseffekter og taylorrekker på de reelle tall

Som et eksempel skal vi se på krysseffekter på de reelle tall. Jeg vil her anta at f er analytisk.

Vi regner med avvik som i (4), bare modifisert slik at f ikke nødvendigvis trenger å være en homomorfisme med $f(0) = 0$: (Her vil f() stå for f(0))

$$\begin{aligned} L_n f(x_1, \ldots x_n) = f(x_1 \top \cdots \top x_n) = \\ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(x_{i_1} + \cdots + x_{i_k}) \end{aligned} \tag{9}$$

For eksempel får vi

$$\begin{aligned} L_1 f(x_1) &= f(x_1) - f(0) \\ L_2 f(x_1, x_2) &= f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2) + f(0) \end{aligned}$$

Vi ser at for en konstant (0-te ordens) funksjon vil $L_1 f$ være lik 0, for en lineær (1-te ordens) funksjon vil $L_2 f$ være lik 0. Generelt vil en n-te ordens funksjon ha at den n-te krysseffekten ulik 0, mens den $n+1$-te krysseffekten og dermed også alle høyere krysseffekter vil bli lik 0.

Hvis vi ikke begrenser oss til $x_0 = 0$ kan vi definere T_n ved at vi legger til x_0 i alle leddene i definisjonen til L_n:

$$T_n f(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f(x_0 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_k})$$

De n-te krysseffekten kan defineres ved hjelp av en n-kube på følgende måte: Vi har en n-kube som definert i definisjon 2.1 og lar $S = \{1, \ldots, n\}$. For en $T \in \mathcal{P}(S)$ lar vi $F(T) = f(\sum_{i \in T} x_i)$. Vi kan da beregne krysseffekten rekursivt ved at vi ser på n-kuben som en avbildning mellom to $n-1$-kuber og vi lar krysseffekten til n-kuben være differansen mellom krysseffektene til de to $n-1$-kubene, hvor vi setter krysseffekten til en node lik verdien til noden.

Vi legger merke til at

$$\begin{aligned} L_n(x_1, \ldots, x_n) &= T_{n-1}(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) - L_{n-1}(x_1 \ldots x_{n-1}) \\ T_n(x_0, \ldots, x_n) &= T_{n-1}(x_n + x_0, x_1, \ldots x_{n-1}) - T_{n-1}(x_0 \ldots x_{n-1}) \end{aligned}$$

Eksempel 3.4 (Beregning av L_3) Her skal vi beregne L_3 ved å berengne "itererte differanser" til følgende 3-kube:

$$
\begin{tikzcd}
 & f(x_1+x_2+x_3) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & f(x_2+x_3) \arrow[dl, no head] \arrow[dd, no head] \\
f(x_1+x_3) \arrow[rr] \arrow[dd] & & f(x_3) \arrow[dd] & \\
 & f(x_1+x_2) \arrow[rr] \arrow[dl] & & f(x_2) \arrow[dl] \\
f(x_1) \arrow[rr] & & f(0) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
&L_3 f(x_1,x_2,x_3) = T_2 f(x_3,x_1,x_2) - L_2 f(x_1,x_2) = \\
&\quad [T_1 f(x_2+x_3,x_1) - T_1 f(x_3,x_1)] - [T_1 f(x_2,x_1) - L_1 f(x_1)] = \\
&\quad [(f(x_1+x_2+x_3) - f(x_2+x_3)) - (f(x_1+x_3) - f(x_3))] \\
&\qquad - [(f(x_1+x_2) - f(x_2) - f(x_1))] = \\
&\quad f(x_1+x_2+x_3) - f(x_1+x_2) - f(x_1+x_3) - f(x_2+x_3) \\
&\qquad + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)
\end{aligned}
$$

Vi ser dermed at dette stemmer overens med (9).

Vi definerer nå differensialet D_n på følgende vis når $f(x)$ er glatt in en omegn om $x = 0$:

$$D_n f(x) = \lim_{a_1,\ldots a_n \to 0} \frac{1}{n! a_1 \ldots a_n} L_n f(a_1 x, \ldots, a_n x) \tag{10}$$

Tilsvarende kan vi definere d_n når $f(x)$ er glatt i en omegn om x_0:

$$d_n f(x_0) = \lim_{a_1,\ldots a_n \to 0} \frac{1}{n! a_1 \ldots a_n} T_n f(x_0, x_0 + a_1 x, \ldots, x_0 + a_n x)$$

Proposisjon 3.5

$$d_n f(x) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \bigg|_{x=x_0} x^n$$

Bevis: Vises ved induksjon. Det er trivielt at

$$d_0 f(x_0) = f(x_0)$$

Antar at induksjonshypotesen gjelder for d_{n-1}. Da vil

$$\begin{aligned}
d_n f(x_0) &= \lim_{a_1,\dots a_n \to 0} \frac{1}{n! a_1 \dots a_n} T_n f(x_0, a_1 x, \dots, a_n x) \\
&= \lim_{a_1 \to 0} \frac{1}{n a_1} \Bigg[\lim_{a_2,\dots a_n \to 0} \frac{1}{(n-1)! a_2 \cdots , a_n} \\
&\quad \cdot T_{n-1} f(x_0 + a_1 x, a_2 x, \dots a_n x) \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)! a_2 \cdots a_n} T_{n-1} f(x_0, a_2 x, \dots, a_n x) \Bigg] \\
&= \lim_{a_1 \to 0} \frac{1}{n! a_1} (f^{(n-1)}(x_0 + a_1 x) - f^{(n-1)}(x_0)) x^{n-1} \\
&= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \bigg|_{x=x_0} x^n
\end{aligned}$$

I den siste overgangen brukes L'Hopital's regel. □

Siden $D_n f(x) = d_n f(0)$ gjelder dermed følgende:

$$\begin{aligned}
D_0 f(x) &= f(0) \\
D_1 f(x) &= \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} L_1 f(ax) = f'(0) x \\
D_2 f(x) &= \lim_{a_1, a_2 \to 0} \frac{1}{2 a_1 a_2} L_2 f(a_1 x, a_2 x) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x) \bigg|_{x=0} x^2 \\
D_n f(x) &= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \bigg|_{x=0} x^n
\end{aligned}$$

Vi ser dermed at $D_n f(x)$ er nøyaktig det n-te leddet i taylor-rekken til $f(x)$. Hvis vi betegner den n-te Taylor-rekken til $f(x)$ med $P_n f(x)$ får vi følgende rekursive definisjon på Taylor-rekken:

$$\begin{aligned}
P_0 f(x) &= f(0) \\
D_n f(x) &= P_n f(x) - P_{n-1} f(x) \\
P f(x) &= \lim_{n \to \infty} P_n f(x)
\end{aligned}$$

4 Tensorproduktet

I dette kapitelet skal jeg først definere tensorproduktet. Deretter skal jeg beregne krysseffektene til funktoren F gitt ved $FV = V \otimes V$.

4.1 Introduksjon

Definisjon 4.1 (Tensorprodukt) I det følgende lar vi $\{V_1, V_2 \ldots, V_n\}$ være en mengde med vektorrom over en kommutativ ring k. Tensorproduktet til disse vektorrommene defineres som følgende k-vektorrom:

$$V_1 \otimes_k V_2 \otimes_k \cdots \otimes_k V_n = \{\sum_{i=1}^{n} v_{1i} \otimes v_{2i} \otimes \cdots \otimes v_{ni} | v_{ji} \in V_j\} / \sim \qquad (11)$$

hvor $\sim$ er gitt ved følgende:

$$v_1 n \otimes v_2 \sim v_1 \otimes n v_2, \quad n \in k$$
$$(v_{11} + v_{12}) \otimes (v_{21} + v_{22}) \sim v_{11} \otimes v_{21} + v_{11} \otimes v_{22} + v_{12} \otimes v_{21} + v_{12} \otimes v_{22}$$

På tilsvarende vis kan tensorproduktet defineres for $V_1 \otimes_R V_2$ hvor R er en vilkårlig ring, V_1 en høyre R-modul og V_2 en venstre R-modul.

Heretter utelater jeg k i $\otimes_k$ hvor det går frem fra sammenhengen hvilken ring vi arbeider på, eller hvis det ikke har noen betydning for beregningene.

Proposisjon 4.2 *Hvis V_1 er n-dimensjonal og V_2 er m-dimensjonal så er $V_1 \otimes_k V_2$ $n \cdot m$-dimensjonal.*

Bevis: Hvis $e_{11}, \ldots, e_{1n}$ er en basis for V_1 og $e_{21}, \ldots, e_{2m}$ en basis for V_2, så er

$$e_{1i} \otimes e_{2j}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$$

en basis for $V_1 \otimes V_2$. □

Når vi regner med vektorrom vil det kartesiske produktet tilsvare addisjon og tensorproduktet tilsvare multiplikasjon. Bruker heretter $\oplus$ for det kartesiske produktet.

Proposisjon 4.3 *Beregninger med $\otimes$ og $\oplus$ er kommutativt, assosiativt og distributivt opp til isomorfi:*

$$V_1 \oplus V_2 \cong V_2 \oplus V_1$$
$$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$$
$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$$
$$V_1 \oplus (V_2 \oplus V_3) \cong (V_1 \oplus V_2) \oplus V_3 \cong V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$
$$V_1 \otimes (V_2 \oplus V_3) \cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_3)$$

Bevis: Assosiativitet er greit å vise.

Ser kun på enkeltelementer i summen i (11), siden hvis vi kan avbilde et enkeltelement, kan vi også bruke den samme avbildingen på hele summen.

- Kommutativitet for $\otimes$:
  Definerer en avbildning $V_1 \otimes V_2 \to V_2 \otimes V_1$ ved
  $$v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$$
  Denne avbildingen er en isomorfi siden den er 1-1 og inverterbar.

- Distributivtet:
  Her definerer vi følgende avbildninger:
  $$\begin{aligned} V_1 \otimes (V_2 \oplus V_3) &\to (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_3) \\ v_1 \otimes \langle v_2, v_3 \rangle &\mapsto \langle v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes v_3 \rangle \end{aligned}$$
  $$\begin{aligned} (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V_3) &\to V_2 \oplus V_3 \\ \langle v_1 \otimes v_2, v_1^* \otimes v_3 \rangle &\mapsto (v_1 + v_1^*) \otimes \langle v_2, v_3 \rangle \end{aligned}$$
  Siden vi har avbildninger begge veier som begge er onto har vi en isomorfi.

$\square$

Proposisjon 4.4 *Følgende relasjoner gjelder:*

$$\begin{aligned} &1. \quad 0 \otimes_k V \cong 0 \\ &2. \quad k \otimes_k V \cong V \end{aligned}$$

Bevis:

1. Et element i $0 \otimes V$ kan skrives som:
   $$\sum_{i=0}^{n} 0 \cdot 0 \otimes k_i v_i \sim \sum_{i=0}^{n} 0 \otimes 0 \cdot k_i v_i \sim 0 \otimes 0$$
   Dermed har vi kun 1 element som trivielt er isomorft med 0.

2. Vi definerer følgende avbildninger:
   $$\begin{aligned} k \otimes V &\to V \\ k_1 \otimes v \sim 1 \otimes k_1 v &\mapsto k_1 v \end{aligned}$$
   $$\begin{aligned} V &\to k \otimes_k V \\ v &\mapsto k_1 \otimes_k v, \quad \text{valgfri } k_1 \in k \end{aligned}$$
   Begge disse avbildingene er 1-1 og på og vi har dermed en isomorfi.

$\square$

4.2 Krysseffekter ved tensorprodukt

$\ker\{X \to Y\}$ vil her stå for kjernen til avbildingen $X \to Y$.

Vi skal se på funktoren F fra kategorien av vektorrom inn i kategorien av vektorrom definert ved $FV = V \otimes V$. Den første krysseffekten kan vi beregne på følgende måte:

$$L_1F(V) = \ker\{FV \to F0\} = \ker\{V \otimes V \to 0\} = V \otimes V$$

Vi beregner L_2 ved å beregne den itererte kjernen til følgende kube:

$$\begin{tikzcd}
F(V_1 \oplus V_2) \arrow[r] \arrow[d] & FV_1 \arrow[d] \\
FV_2 \arrow[r] & F0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
L_2F(V_1, V_2) &\cong \ker\{\ker\{F(V_1 \oplus V_2) \to FV_2\} \to \ker\{FV_1 \to F0\}\} \\
&\cong \ker\{\ker\{(V_1 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_2 \otimes V_1) \oplus (V_2 \otimes V_2) \to V_2 \otimes V_2\} \\
&\quad \to \ker\{V_1 \otimes V_1 \to 0\}\} \\
&\cong \ker\{(V_1 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_2 \otimes V_1) \to V_1 \otimes V_1\} \\
&\cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_2 \otimes V_1)
\end{aligned}$$

Vi skal beregne de 3-dimensjonale krysseffektene, men vi ser først på hva som skjer hvis vi legger til et vilkårlig vektorrom V til alle ledd i $L_2F(V_1, V_2)$:

$$\begin{aligned}
T_2F(V, V_1, V_2) &\cong \ker\{\ker\{F(V_1 \oplus V_2 \oplus V) \to F(V_2 \oplus V)\} \\
&\quad \to \ker\{F(V_1 \oplus V) \to F(V)\} \\
&\cong \ker\{(V_1 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_1 \otimes V) \oplus (V_2 \otimes V_1) \oplus (V \otimes V_1) \\
&\quad \to (V_1 \otimes V_1) \oplus (V_1 \otimes V) \oplus (V \otimes V_1)\} \\
&\cong (V_1 \otimes V_2) \oplus (V_2 \otimes V_1) \\
&\cong L_2F(V_1, V_2)
\end{aligned}$$

Dermed får vi følende 3-kube som vi beregner de itererte kjernene til:

$$
\begin{tikzcd}
 & F(V_1 \oplus V_2 \oplus V_3) \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & F(V_1 \oplus V_3) \arrow[dl] \arrow[dd] \\
F(V_1 \oplus V_2) \arrow[rr] \arrow[dd] & & FV_1 \arrow[dd] & \\
 & F(V_2 \oplus V_3) \arrow[rr] \arrow[dl] & & FV_3 \arrow[dl] \\
FV_2 \arrow[rr] & & F0 &
\end{tikzcd}
$$

$$L_3F(V_1, V_2, V_3) \cong \ker\{T_2F(V_3, V_1 \oplus V_3, V_2 \oplus V_3) \to L_2F(V_1, V_2)\} \cong 0$$

Dermed blir også alle høyere-ordens krysseffekter lik 0.

Disse resultatene tilsvarer de som vi får når vi regner med de reelle tall og ser på funksjonen $f(x) = x^2$. Her har vi også at $L_1f(x) = x^2$, $L_2f(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ og $L_3f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Her er L_n definert som i avsnitt 3.3.

5 Goodwillie Calculus

5.1 Introduksjon

I sine artikler [Goo90], [Goo92] og [Goo] utviklet Goodwillie en teori for funktorer som har mange likhetstrekk med klassisk reell analyse. Blandt annet har vi utrykk for den deriverte til en funktor og vi kan på tilsvarende vis som i kapittel 3.3 utvikle en Taylor-rekke eller i dette tilfellet et Taylor-tårn for funktoren.

I det følgende vil vi arbeide i kategorien av punkterte topologiske rom, $\mathcal{T}op_*$, det vil si topologiske rom med et gitt basispunkt og hvor funktorene tar basispunkt på basispunkt. Videre antar vi at alle funktorene er homotopifunktorer, funktorer som tar ekvivalenser på ekvivalenser. Videre lar vi alle ekvivalenser være svake ekvivalenser.

Metodene i Goodwillie Calculus vil også fungere i mange andre kategorier. Kravet er at vi har et sammenhengsbegrep i kategorien.

Først vil vi se på en del binæroperasjoner mellom rom som vil tilsvare de vanlige regneoperasjonene i de reelle tall. Videre vil vi konstruere en metrikk ut fra sammenhengsgraden.

Tabellene for operasjonene og metrikken er hentet fra [Dun94].

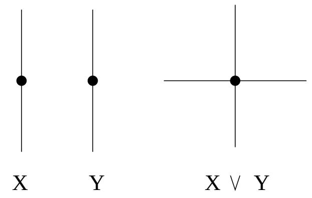
5.1.1 Operasjoner

$X, Y \in \mathcal{T}op_*$

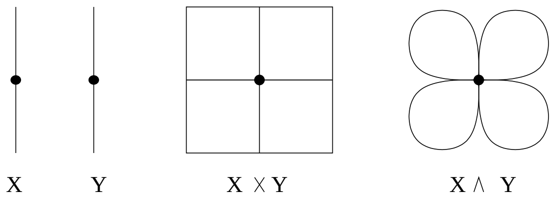
	$\mathbb{R}$	Top
addisjon	$x + y$	$X \vee Y = X \coprod Y/$basispunktene
multiplikasjon	$x \cdot y$	$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$
divisjon	x/y	$Map(Y, X)$
subtraksjon	$x - y$	$fiber\{X \to Y\}$
enhet	1	S^0 (to punkter)
null	0	$*$ (ettpunkts mengden)

Forklaringer:

- Punktert union ($\vee$) er unionen av de to rommene delt ut på basispunktene.
- Smash ($\wedge$) er det kartesiske produktet av de to rommene delt ut på den punkterte unionen.
- $Map(Y, X)$ er rommet av punkterte avbildninger $Y \to X$ med den vanlige (kompakt-åpne) topologien.
- $fiber\{X \to Y\}$ betyr homotopi-fiberet til avbildningen.
- S^0 er nullsphæren, altså to punkter hvorav det ene er basispunktet.



Figur 1: Punktert union til X og Y



Figur 2: X smash Y

- $*$ er ettpunktsmengden.

Vi ser at disse operasjonene har en del egenskaper som er stemmer overens med egenskapene til de vanlige operasjonene:

- Punktert union ($\vee$) og smash ($\wedge$) er begge assosiative og kommutative, og smash er distributiv over punktert union opp til naturlig isomorfi:

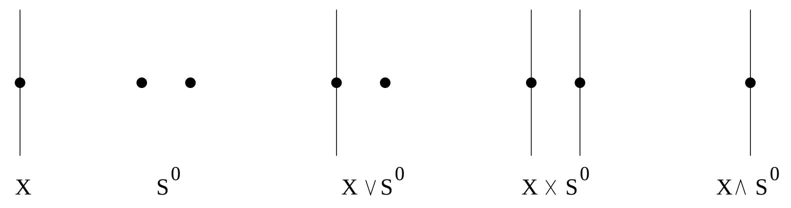
  1. $X \vee (Y \vee Z) \cong (X \vee Y) \vee Z \cong X \vee Y \vee Z$
  2. $X \wedge (Y \wedge Z) \cong (X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge Y \wedge Z$
  3. $X \vee Y \cong Y \vee X$
  4. $X \wedge Y \cong Y \wedge X$
  5. $X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$

  Her er:

$$X \vee Y \vee Z = X \coprod Y \coprod Z/b.p.$$

$$X \wedge Y \wedge Z = X \times Y \times Z/(X \vee Y \vee Z)$$

- $X \vee * = X$, $X \wedge * = *$
- $X \wedge S^0 = X$
  Dette illustreres lettest ved figur:
- $Map(S^0, X) = X$ Dette ser vi fordi en avbildning $S^0 \to X$ er gitt ved hvor det punktet som ikke er basispunktet avbildes.



Figur 3: Illustrasjon av $X \wedge S^0$

5.1.2 Metrikk

Vi velger ettpunktsmengden $*$ som basispunkt for metrikken. Videre sier vi at et rom har liten norm, og dermed ligger nært $*$ dersom rommet er høyt sammenhengende.

Dette kan skrives på følgende måte:

	$\mathbb{R}$	Top
norm	$\|x\| = \sqrt{x^2}$	$\|X\| = 10^{-(m+1)}$ om X er m-smh.
avstand	$\|x - y\|$	$\|X \to Y\| = 10^{-m}$ om $X \to Y$ er m-smh.
multiplikasjon	$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$	$\|X \wedge Y\| = \|X\| \cdot \|Y\|$
divisjon	$\|x/y\| = \|x\|/\|y\|$	$\|Map(S^n, X)\| = \|X\|/\|S^n\|$
enhet	$\|1\| = 1$	$\|S^0\| = 1$
null	$\|0\| = 0$	$\| * \| = 0$

Dette fungerer fint for avstand og multiplikasjon, samtidig som vi ser at $*$ er uendelig sammenhengende ($\pi_q(*) = 0$ for alle q), og S^0 er 0-sammenhengende. Men for divisjon så virker ikke denne metrikken like bra siden det er dimensjonen til Y, og ikke sammenhengsgraden som bestemmer sammenhengsgraden til $Map(Y, X)$, men fordi sfærene har samme sammenhengsgrad som dimensjon går det bra for disse.

Sfærene er også viktige siden sfærene blir mer og mer sammenhengende når dimensjonen øker. Dermed danner de en følge som vil konvergere mot null i metrikken vår: Når N vokser vil S^N bli meget høyt sammenhengende og dermed ligge nært til $*$.

Ved hjelp av de ovenstående regneoperasjoner og metrikk kan vi definere den deriverte for funktorer, som en ren oversettelse av den klassiske definisjonen:

	$\mathbb{R}$	Top
	$\Delta_a f(x) = f(x+a) - f(x)$	$\Delta_A F(X) = \text{fiber}\{F(X \vee A) \to F(X)\}$
derivert	$\delta f(x) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} \Delta_a f(x)$	$\delta F(X) = \lim_{N \to \infty} Map(S^n, \Delta_{S^n} F(X))$

De høyere deriverte til en funktor kan defineres på samme vis.

5.2 Totalt fiber til en kube

Det totale fiberet til en kube kan sees på som et mål for hvorvidt en kube er en homotopi-kartesisk kube. Hvis vi anvender en funktor på en homotopi-kokartesisk kube og deretter beregner det totale fiberet til den resulterende kuben får vi et mål på hvorvidt funktoren tar homotopi-kokartesiske kuber på homotopi-kartesiske kuber. Dette kan vi se på som en utvidelse av krysseffekter til kategorien av punkterte topologiske rom.

Totalfiberet $\tilde{f}\mathfrak{X}$ til en n-kube $\mathfrak{X}$ av punkterte rom er et punktert rom som kan defineres ved induksjon: Se på $\mathfrak{X}$ som en avbildning $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ mellom to $(n-1)$-kuber. Vi definerer da $\tilde{f}\mathfrak{X}$ som homotopi-fiberet til $\tilde{f}\mathfrak{Y} \to \tilde{f}\mathfrak{Z}$. Vi setter $\tilde{f}X = X$ for en 0-kube X.

Vi kan også definere totalfiberet på en annen måte:

Gitt en kube $\mathfrak{X}$. Vi lar $\mathfrak{X}(\emptyset)$ være hjørnet i kuben som tilsvarer den tomme mengden. Videre lar vi $h(\mathfrak{X})$ være homotopigrensen til det diagrammet vil får når vi fjerner $\mathfrak{X}(\emptyset)$ fra $\mathfrak{X}$. Deretter definerer vi en avbildning:

$$a(\mathfrak{X}) : \mathfrak{X}(\emptyset) \to h(\mathfrak{X})$$

Da vil totalfiberet $\tilde{f}\mathfrak{X}$ være homeomorft med homotopifiberet til $a(\mathfrak{X})$.

For en forklaring for at denne definisjonen tilsvarer den som vi definerte ved induksjon, se [Goo92].

Vi ser at kuben er homotopikartesisk dersom $a(\mathfrak{X})$ er en ekvivalens.

Definisjon 5.1 Dersom $a(\mathfrak{X})$ er k-sammenhengende er $\mathfrak{X}$ en k-homotopi-kartesisk kube.

Analogt til dette kan vi definere k-homotopi-kokartesiske kuber, ved at vi ser på homotopi-kogrenser og avbildninger mellom disse og det finale objektet. For detaljer se [Goo92].

Proposisjon 5.2 *For avbildninger av kuber $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ gjelder følgende:*

1. *$\mathfrak{X}$ er k-homotopi-kartesisk hvis $\mathfrak{Y}$ og $\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ er k-homotopi-kartesisk.*
2. *$\mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ er k-homotopi-kartesisk dersom $\mathfrak{X}$ er k-homotopi-kartesisk og $\mathfrak{Y}$ er $(k+1)$-homotopi-kartesisk.*

For bevis se [Goo92], side 303.

5.3 Stabil eksisivitet

Stabil eksisivt er et mål på hvor godt funktoren bevarer sammenhengsgraden.

Definisjon 5.3 (Eksisiv funktor) En eksisiv funktor er en funktor som sender et homotopi-kokartesisk kvadrat på et homotopi-kartesisk kvadrat.

Dermed kan vi definere lineære funktorer

Definisjon 5.4 En lineær funktor er en funktor F som er eksisiv og som sender basispunkt på basispunkt: $F(*) \cong *$.

På tilsvarende vis kan vi definere funktorer av høyere grad:

Definisjon 5.5 En funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ har grad n dersom for enhver sterkt homotopi-kokartesisk $(n+1)$-kube $\mathfrak{X}$ i $\mathcal{C}$ så er $F(\mathfrak{X})$ homtopi-kartesisk. Dette sier vi er det samme som at F er n-eksisiv.

Proposisjon 5.6 *Hvis F er n-eksisiv medfører dette at F er $n+1$-eksisiv.*

Bevis: Vi ser på $n+1$-kuben $\mathfrak{X}$ som en avbildning mellom 2 n-kuber $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$. Da har vi at hvis $\mathfrak{X}$ er sterkt homotopi-kokartesisk så er $\mathfrak{Y}$ og $\mathfrak{Z}$ det. Siden F er n-eksisiv så er $F(\mathfrak{Y})$ og $F(\mathfrak{Z})$ homotopi-kartesiske. Dermed er også $F(\mathfrak{X})$ homotopi-kokartesisk og dermed er F $(n+1)$-eksisiv. $\square$

Definisjon 5.7 (Stabilt eksisiv funktor) Gitt følgende homotopi-kokartesiske kvadrat $\mathfrak{X}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X_1 \arrow[d] \\ X_2 \arrow[r] & X_{12} \end{tikzcd}$$

Dersom det finnes heltall κ, c slik at f er k_1-sammenhengende og g er k_2-sammenhengende hvor $k_i \geq \kappa$ for $i = 1, 2$, er F stabilt eksisiv hvis $F(\mathfrak{X})$ er en $(k_1 + k_2 - c)$-homotopi-kartesisk kube.

Dette kan oversettes til metrikken vår på følgende vis:

Definisjon 5.8 F er stabilt eksisiv dersom det finnes tall κ og c slik at for alle diagram som i definisjonen over hvor $|X - X_1| \leq |S^N|$ og $|X - X_2| \leq |S^M|$ hvor $M, N > \kappa$, så er $|\tilde{f}(\mathfrak{X})| \leq |S^{N+M+c}|$.

Vi ser at dette er samme definisjon som over siden $|X - Y| \leq |S^N|$ betyr at $X \to Y$ er minst $N+1$-sammenhengende. Videre vil sammenhengsgraden til $\tilde{f}(\mathfrak{X})$ være lik sammenhengsgraden til $a(\mathfrak{X})$ minus 1.

Stabil eksisivitet tilsvarer kontinuitet i det reelle tilfellet. Dette fordi at stabil eksisivitet sier at for alle $X \in \mathcal{T}op_*$ så så vil F ligne på en lineær funktor for alle rom som er tilstrekkelig nære X.

På tilsvarende vis kan vi definere stabil eksesivitet for høyere ordens kuber.

Definisjon 5.9 F tilfredstiller $E_n(c, \kappa)$ (er stabilt n-eksisiv) dersom det finnes heltall c og κ slik at for enhver sterkt kokartesisk n-kube $\mathfrak{X}$ så gjelder at hvis for alle $s \in S$ avbildningen $\mathfrak{X}(\emptyset) \to \mathfrak{X}(s)$ er k_s-sammenhengende og $k_s \geq \kappa$, så er $F(\mathfrak{X})$ $(-c + \sum k_s)$-homotopi-kartesisk.

Legg merke til at jo lavere c og κ skal være, jo sterkere blir kravet.

Definisjon 5.10 (ρ-analysitet) F er ρ-analytisk dersom det finnes et tall q slik at F tilfredstiller $E_n(n\rho - q, \rho + 1)$ for alle $n \geq 1$.

5.4 Krysseffekter

Vi skal nå se på en analogi til krysseffekter som virker for punkterte topologiske rom. Fremgangsmåten her er analog til det vi gjorde i kapittel 3.3 og 3.2.

I det følgende vil alltid X_i være et punktert topologisk rom, og S være mengden $\{1, \ldots, n\}$

Vi lar $\mathfrak{X}$ være den sterkt kokartesiske n-kuben hvor vi lar $\mathfrak{X}(S) = X_\emptyset$ og $\mathfrak{X}(S \setminus s) = X_s \coprod X_\emptyset$, og hvor avbildningene er inklusjoner. Det kan vises at denne alltid eksisterer.

Vi definerer så operatoren $T_n F(X_\emptyset, X_1, \ldots, X_n)$ som total fiberet til n-kuben $F\mathfrak{X}$.

$$T_n F(X_\emptyset, X_1, \ldots, X_n) = \tilde{f} F \mathfrak{X} \tag{12}$$

Hvor $\mathfrak{X}$ er definert som over.

Videre kan vi definere den n-te krysseffekten til F. La $\mathfrak{Y}$ være den sterkt kokartesiske kuben hvor $\mathfrak{Y}(S) = *$, $\mathfrak{Y}(T) = \bigvee_{s \in S} X_s$. Da kan vi definere den n-te krysseffekten til F, $L_n F$ som

$$L_n F(X_1, \ldots, X_n) = \tilde{f} F \mathfrak{Y} \tag{13}$$

Legg merke til at for en n-te grads funktor er $L_{n+1} = 0$.

5.5 Taylor-tårnet til F

Ved å "oversette" det som vi gjorde for de reelle tallene til punkterte topologiske rom ved hjelp av operasjonene og "metrikken" som vi definerte over, kan vi danne følgende differensialet:

$$D_n^! F(X) = \lim_{N_1, \ldots N_n \to \infty} Map(S^{N_1} \wedge \cdots \wedge S^{N_n}, L_n F(S^{N_1} \wedge X, \ldots, S^{N_n} \wedge X)) \tag{14}$$

Dette differensialet stemmer helt overens med det tilsvarende i kapittel 3.3, med det unntak at vi ikke har tatt med $\frac{1}{n!}$. Dette retter vi på ved at på samme måte som for de reelle tall identifiserer antall måter vi kan beregne det itererte fiberet ved den symmetriske gruppen Σ_n, som har $n!$ elementer som tilsvarer de $n!$ måtene å ta fiberet på. Å identifisere resultatene av de forskjellige måtene blir det som tilsvarer å dele på $n!$, det vil si at vi tar (homotopi)-banene av Σ_n virkningen på $D_n^! F(X)$:

$$D_n F(x) = D_n^! F(x)_{h\Sigma_n} \tag{15}$$

I motsetning til det reelle tilfellet vil differensialet D_n alltid eksistere, men det er ikke alltid at det gir noen mening. Men hvis F er stabilt eksisiv vil det oppføre seg som forventet. For eksempel har vi følgende resultat:

Proposisjon 5.11 *Hvis F er stabilt eksisivt er $D_1 F$ lineær.*

Videre kan vi danne Taylor-tårnet til F på følgende måte:

$$F(X) \to \lim_{\leftarrow} P_N F(X) \to \cdots \to P_n F(X) \to \cdots \to P_1 F(X) \to P_0 F(X) = F(*) \tag{16}$$

Dette er en følge av funktorer $P_n F : \mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op_*$ hvor vi har naturlige avbildninger $P_{n+1} F \to P_n F$ med fiber $D_{n+1} F$.

Dersom F er ρ-analytisk har Taylor-tårnet følgende egenskaper:

1. $P_n F$ har grad n.

2. De $n+1$ første deriverte til F og $P_n F$ er like i $*$.

3. $F \to P_n F$ er universiell. Det vil si at for enhver G med de $n+1$ første deriverte i $*$ lik de til $P_n F$ og en avbildning $G \to P_n F$ vil vi ha en unik avbildning $G \to F$.

4. $D_n F = \text{fiber}\{P_n \to P_{n-1}\}$ vil kunne beregnes som over.

5. Hvis X er ρ-sammenhengende er $F(X) \to \underset{\overleftarrow{P}}{\to} \lim_n F(X)$ en ekvivalens.

Fra det siste kravet ser vi at ρ tilsvarer konvergensradien.

A Kategoriteori

I dette avsnittet skal vi gi en meget kort innføring i kategoriteori, samt definere en del begrep som vi har bruk for senere. For en grundigere introduksjon, se [Mac98].

A.1 Introduksjon

Definisjon av en kategori

En kategori $\mathcal{C}$ består av en mengde $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ av objekter, en mengde $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ av piler (vanligvis blir pilene i en kategori kalt for *morfismer*). Vi har to avbildninger fra $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ til $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$. For en f i $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ er det et objekt i $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ $\mathrm{dom} f$, *domenet* til f, og et objekt $\mathrm{cod} f$, *kodomenet* til f. Dette tolkes som at pilen går fra $\mathrm{dom} f$ til $\mathrm{cod} f$.

Videre har vi for et objekt a i $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ en identitetsmorfisme, med domene og kodomene a. Denne morfismen kaller vi id_a eller 1_a.

Dessuten må det for alle par av morfismer f og g hvor $\mathrm{cod} f = \mathrm{dom} g$ eksistere en entydig komposisjon $f \circ g$. Denne komposisjonen er assosiativ og respekterer enheten. Det vil si at de følgende diagrammene kommuterer.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(f\circ g)"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "(g\circ h)"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "Id_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
& B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Noen spesielle morfismer og objekt

- En morfisme $e : a \to b$ er *invertibel* i $\mathcal{C}$ dersom det eksisterer en morfisme $e' : b \to a$ i $\mathcal{C}$ slik at $e'e = 1_a$ og $ee' = 1_b$. En slik e' er entydig hvis den eksisterer og vil skriver denne som $e' = e^{-1}$. To objekter i kategorien $\mathcal{C}$ er *isomorfe* dersom det finnes en invertertibel morfisme $e : a \to b$.

- En morfisme $m : a \to b$ er *monisk* i $\mathcal{C}$ dersom det for to vilkårlige parallelle morfismer $f_1, f_2 : d \to a$ har at likheten $m \circ f_1 = m \circ f_2$ medfører at $f_1 = f_2$.

- En morfisme $m : a \to b$ er *epi* i $\mathcal{C}$ dersom det for to vilkårlige parallelle morfismer $g_1, g_2 : d \to a$ har at likheten $g_1 \circ m = g_2 \circ m$ medfører at $g_1 = g_2$.

- Et *terminalt objekt* t i en kategori er et objekt hvor det for et vilkålig annet objekt a eksister nøyaktig en morfisme $a \to t$.
- Et *initielt objekt* s er et objekt hvor det for et vilkårlig annet objekt a eksisterer nøyaktig en morfisme $s \to a$.
- Et *nullobjekt* z er et objekt som både er initielt og terminalt. For alle par av objekter a, b eksisterer det da en *nullmorfisme* $0 : a \to z \to b$.
- For objekter a og b i en kategori $\mathcal{C}$ definerer vi *hom-settet*

$$\mathcal{C}(a,b) = \{f \in \operatorname{Mor}\mathcal{C} |\, \operatorname{dom} f = a, \operatorname{cod} f = b\}$$

Funktor

En funktor er en morfisme mellom kategorier. En funktor $T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ tilordner til hvert element c i $\mathcal{C}$ et element Tc i $\mathcal{B}$ og for hver morfisme $f : c \to c'$ i $\mathcal{C}$ tilordnes en morfisme $Tf : Tc \to Tc'$ i $\mathcal{B}$ slik at:

$$T(1_c) = 1_{Tc}, \quad T(g \circ f) = Tg \circ Tf \tag{17}$$

Den siste betingelsen gjelder når komposisjonen $g \circ f$ er definert i $\mathcal{C}$.

Naturlig transformasjon og isomorfismer mellom funktorer

Gitt to funktorer $S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$. En *naturlig transformasjon* $\tau : S \to T$ er en funksjon som for et hvert objekt c i $\mathcal{C}$ gir en morfisme $\tau_c = \tau c : Sc \to Tc$ i $\mathcal{B}$ slik at følgende diagram kommuterer for alle morfismer $f : c \to c'$ i $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c', & Sc' \arrow[r, "\tau c'"] & Tc' \end{tikzcd}$$

Hvis dette gjelder sier vi at $\tau : S \to T$ er *naturlig* i c.

Vi kan nå definere en funktorkategori der funktorene er objekter og de naturlige transformasjone er morfismer mellom funktorene. En naturlig transformasjon τ hvor ethvert komponent τc er inverterbar i $\mathcal{B}$ kalles en *naturlig isomorfisme*; $\tau : S \cong T$. Her er inversene $(\tau c)^{-1}$ i $\mathcal{B}$ komponenter til den naturlige isomorfismen $\tau^{-1} : T \to S$.

Den motsatte kategorien og kontravariante funktorer

For enhver kategori $\mathcal{C}$ kan vi definere en kategori kallt den motsatte kategorien $\mathcal{C}^{op}$. Denne kategorien har de samme objektene som $\mathcal{C}$ og for enhver morfisme f i $\mathcal{C}$ en morfisme f^{op} i $\mathcal{C}^{op}$ hvor $\operatorname{dom} f^{op} = \operatorname{cod} f$ og $\operatorname{cod} f^{op} = \operatorname{dom} f$. $\mathcal{C}^{op}$ blir dermed en kategori som ser ut som $\mathcal{C}$, men hvor alle pilene er snudd.

En *kontravariant funktor* fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{B}$ tilvarer en vanlig (kovariant) funktor fra $\mathcal{C}^{op}$ til $\mathcal{B}$

A.2 Universielle morfismer

I dette avsnittet skal vi definere en del viktige universielle konstruksjoner.

Definisjon A.1 (Universiell morfisme) La $S : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funktor og $c \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$. En universiell morfisme fra c til S er da et par $\langle r, u\rangle$ hvor $r \in \operatorname{ob}\mathcal{D}$ og $u : c \to Sr$ slik at for ethvert par $\langle d, f\rangle$, $d \in \operatorname{ob}\mathcal{D}$, $f : c \to Sd$ eksisterer det en unik morfisme $f' : r \to d$ i $\mathcal{D}$ med $Sf' \circ u = f$.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Sr \arrow[d, dashed, "Sf'"] & r \arrow[d, dashed, "f'"] \\ c \arrow[r, "f"] & Sd, & d \end{tikzcd}$$

Grenser og Kogrenser

Hvis vi lar $\mathcal{C}$ være en kategori og $\mathcal{J}$ være en indekskategori. Funktorkategorien $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ er da kategorien av alle funktorer $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$. Diagonalfunktoren

$$\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$$

sender da et objekt c til en konstant funktor Δc, hvor alle elementer i $\mathcal{J}$ sendes på c og alle morfismer i $\mathcal{J}$ sendes på 1_c. Hvis vi har en funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ vi den være et objekt i $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. Den universielle pilen $\langle r, u\rangle$ fra F til Δ kalles da kogrensen til F og skrives $\lim_{\to} F$, mens den universielle pilen fra Δ til F kalles grensen til F og skrives ofte $\lim_{\leftarrow} F$.

Egenskapene til $\lim_{\leftarrow} F$ og $\lim_{\to} F$ oppsummeres av det nedenstående diagrammet. Her er de horisontale pilene kjegler (avbildninger $F \to \Delta c$ eller $\Delta c \to F$) og de vertikale pilene er avbildninger i $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} Lim\ F \arrow[r, "\nu"] & F \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & Colim\ F \arrow[d, dashed] \\ c \arrow[u, dashed] \arrow[r, "\tau"'] & F \arrow[r, "\sigma"'] & c \end{tikzcd}$$

Vi skal nå se på noen viktige eksempler på grenser og kogrenser.

Produkt og Koproduktet

Hvis J er den diskrete kategorien $\{1,2\}$ så er en funktor $F : \{1,2\} \to C$ et par av objekter $\langle a, b\rangle$ i $\mathcal{C}$. Grensen til F kalles da *produktet* og skrives $a \times b$, mens kogrensen kalles *koproduktet* og skrives $a \coprod b$.

Kjerner og equalizers

La $\mathcal{J} = \downdownarrows$, kategorien med to piler. Da vil en funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ være par av morfismer i $\mathcal{C}$ med felles domene og kodomene. Grense-objektet d kalles da en *equalizer*, mens kogrense-objektet e kalles *koequalizer*.

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "v"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & a \arrow[r, "u"] & e \end{tikzcd}$$

Her er $fv = gv$ og $uf = ug$

Hvis g er nullmorfismen mellom a og b, kaller vi d for *kjernen* til f og e for *kokjernen* til f.

Pushout og pullback

Gitt i $\mathcal{C}$ et par avbildinger $f : a \to b, g : a \to c$ med felles domene a. En *pushout* til $\langle f, g \rangle$ er da et kommutativt kvadrat (a, b, c, r) slik at det for ethvert annet kommutativt kvadrat (a, b, c, s) bygd på f og g eksisterer en entydig avbildning $t : r \to s$ slik at det følgende diagrammet kommuterer.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & b \arrow[d] \arrow[ddr, bend left] & \\ c \arrow[r] \arrow[drr, bend right] & r \arrow[dr, "t"] & \\ & & s \end{tikzcd}$$

Pushouten er unik opp til isomorfi og benevnes ofte som $b \coprod_a c$. Vi kan også se på pushouten som kogrensen når $\mathcal{J} = (\leftarrow \cdot \rightarrow)$ og $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ blir da to piler i $\mathcal{C}$ med felles domene a. Pushouten kan også defineres på tilsvarende vis for høyereordens kuber.

Det duale tilfellet for pushouten er pullbacken. Pullbacken er dermed grensen når $\mathcal{J} = (\rightarrow \cdot \leftarrow)$. Pullbacken kalles også ofte for det fibrerte produktet over a og skrives ofte $b \times_a d$.

$$\begin{tikzcd} b \times_a d \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & d \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd}$$

Pullback-kvadrater kalles ofte for *kartesiske kvadrater* og pushoutkuber kalles ofte for *kokartesiske kvadrater*.

A.3 Abelske kategorier

En $\mathcal{A}b$-kategori er en kategori hvor alle hom-settene $\mathcal{C}(a, b)$ har en gruppestruktur og hvor komposisjon er biliniær: For $f, f' : a \to b$ og $g, g' : b \to c$,

$$(g + g') \circ (f + f') = g \circ f + g \circ f' + g' \circ f + g' \circ f'.$$

En $\mathcal{A}b$-kategori $\mathcal{A}$ har en del spesielle egenskaper:

- Ethvert hom-sett $\mathcal{A}(a, b)$ har et nullelement som kalles *nullmorfismen*. Dette gjelder også hvis $\mathcal{A}$ ikke har noe nullelement.
- Alle equalizere er kjerner og alle koequalizere er kokjerner.
- Et initiellt eller finalt objekt i $\mathcal{A}$ er et nullobjekt.

Definisjon A.2 (biprodukt) Et biproduktdiagram for to objekt $a, b \in \mathcal{A}$ er et diagram

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift right, "i_1"'] & c \arrow[l, shift right, "p_1"'] \arrow[r, shift left, "p_2"] & b \arrow[l, shift left, "i_1"] \end{tikzcd} \tag{18}$$

hvor p_1, p_2, i_1, i_2 tilfredstiller

$$p_1 i_1 = 1_a, \quad p_2 i_2 = 1_b, \quad i_1 p_1 + i_2 p_2 = 1_c \tag{19}$$

Biproduktet skrives ofte som $c = a \oplus b$, og kalles i en del kategorier, for eksempel i kategorien av abelske grupper eller R-moduler for direkte sum.

Teorem A.3 *To objekter a og b i an $\mathcal{A}b$-kategori $\mathcal{A}$ har et produkt i $\mathcal{A}$ hvis og bare hvis de har et biprodukt i $\mathcal{A}$. De har også et koprodukt hvis og bare hvis de har et biprodukt. (p_1, c, p_2) blir da produktet, mens (i_1, c, i_2) blir koproduktet.*

For bevis se [Mac98].

En *additiv kategori* er en $\mathcal{A}b$-kategori med nullobjekt og hvor det for alle par av objekter eksisterer et biprodukt.

La $\mathcal{A}$ og $\mathcal{B}$ være $\mathcal{A}b$-kategorier. En *additiv funktor* er en funktor $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ som har den følgende egenskapen:

$$T(f + g) = Tf + Tg \tag{20}$$

for alle paralelle par av piler $f, g : a \to b$ i $\mathcal{A}$. Det følger at $T0 = 0$.

Definisjon A.4 (Abelske kategorier) En abelsk kategori $\mathcal{A}$ er en $\mathcal{A}b$-kategori som tilfredstiller de følgende betingelsene:

1. $\mathcal{A}$ har et nullobjekt.

2. $\mathcal{A}$ har binære biprodukt.

3. Enhver pil i $\mathcal{A}$ har en kjerne og en kokjerne.

4. Enhver monisk pil er en kjerne og enhver epi er en kokjerne.

Eksempler på abelske kategorier er $\mathcal{A}b$, kategorien av abelske grupper og $R - Mod$, kategorien av venstre R-moduler.

B Homotopi

I det følgende lar vi $\mathcal{T}op_*$ være kategorien av punkterte topologiske rom.

B.1 Homotopi

Kort fortalt sier vi at to avbildinger er homotope dersom man ved å "puffe" på den ene kan få den andre. Mer presist:

Definisjon B.1 (Homotope avbildinger) La $X, Y \in \mathcal{T}op$ la f, g være to avbildinger mellom X og Y:

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$$

Lar I være identitetsintervallet $[0,1]$. f og g er da homotope dersom det eksisterer en avbildning

$$H : X \times I \to Y$$

slik at

$$H(x,0) = f(x), \qquad H(x,1) = g(x), \qquad x \in X$$

H kalles da en *homotopi* fra f til g.

Definisjon B.2 (Homotopi relativt til basispunkt) Vi sier at H er en homotopi relativt til basispunkt dersom vi for for et gitt basispunkt x_0 har $H(x_0, 0) = H(x_0, t), \quad t \in I$.

Proposisjon B.3 *Homotopi gir da en ekvivalensrelajon. (Både med og uten basispunkt)*

Homotopigruppene $\pi_q(X)$

Definisjon B.4 ($\pi_q(X)$)

$$\underset{x \in X}{\pi_q(X,x)} = Map((S^q, 1), (X, x)) / \sim_{ht}$$

Hvor $\sim_{ht}$ er homotopi relativt til basispunkt og rommet (X, x) er det topologiske rommet X med basispunkt x.

Eksempel B.5

$$\pi_0(X,x) = Map((S^0, 1), (X, x)) / \sim_{ht}$$

$\pi_0(X, x)$ blir dermed en mengde hvor hver hvert element tilsvarer veisammenhengende komponenter i X.

Sammenhengsgrad

Ved hjelp av homotopigruppene kan vi måle sammenhengsgraden. Vi sier at et topologisk rom X er n-sammenhengende dersom $\pi_q(X) = 0$, for $q \leq m$, og en kontinuerlig avbildning $f : X \to Y$ er m-sammenhengende dersom avbildningen mellom homotopigruppene, $\pi_q(X) \to \pi_q(Y)$ er en isomorfi for $q < n$ og surjektiv for $q = n$. Dette viser seg er det samme som at homotopifiberet, som er definert nedenfor, er $n-1$-sammenhengende.

Svake ekvivalenser

Definisjon B.6 (Svak ekvivalens) $X \xrightarrow{f} Y$ er en svak ekvivalens hvis

1. $\pi_0 X \xrightarrow{\cong} \pi_0 Y$
2. for alle $x \in X$ er $\pi_q(X, x) \xrightarrow{\cong} \pi_q(Y, f(x))$

Homotopifiberet

I det følgende betegner I enhetsintervallet $[0, 1]$. X^I blir da alle avbildinger fra I inn i X, som tilsvarer alle veier i X. Ser da på følgende pushout-kube:

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X X^I \arrow[r] \arrow[d] & X^I \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Her er $Y \times_X X^I = \{(y, \omega) \in Y \times X^I | f(y) = \omega(1)\}$. Homotopifiberet til f blir da fiberet til avbildingen $\{Y \times_X X^I \twoheadrightarrow X\}$, det vil si alle elementer i $Y \times_X X^I$ som avbildes på basispunktet i X.

C Simplisielle mengder

C.1 Ordnede mengder

La Δ være kategorien av endelige ordnede mengder. Vi skriver et objekt Δ som $[q] = \{0 < 1 < \cdots < q\}$. Morfismene i Δ blir da de ordningsbevarende avbildningene mellom de ordnede mengdene.

Vi definerer følgende avbildinger:

- inklusjoner $d^i : [n-1] \to [n]$ ved at element nummer i i $[n]$ ikke blir truffet av d^i. For eksempel $d^2 : [3] \to [4]$ virker som følger:

$$\begin{tikzcd}
{[3]:} & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[dr] & 3 \arrow[dr] & \\
{[4]:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{tikzcd}$$

- surjeksjoner $s^i : [n] \to [n-1]$ som virker ved at element i og element $i+1$ sendes på samme elementet. For eksempel $s^2 : [4] \to [3]$ virker som følgende:

$$\begin{tikzcd}
{[4]:} & 0 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & 2 \arrow[dl] & 3 \arrow[dl] & 4 \arrow[dl] \\
{[3]:} & 0 & 1 & 2 & 3 &
\end{tikzcd}$$

Proposisjon C.1 *Alle ordningsbevarende avbildninger $\varphi \in \Delta([m],[n])$ kan skrives som en entydig sekvens av inklusjoner og surjeksjoner:*

$$\varphi = d^{i_k} \cdots d^{i_1} s^{j_1} \cdots s^{j_l}, \quad i_1 < \cdots < i_k,\ j_1 < \cdots < j_l$$

For bevis se [Mac98], side 177.

C.2 Simplisielle objekter

Vi skal nå se på Δ^{op}, den duale kategorien. Hvis $\mathcal{C}$ er en kategori vil et simplisielt $\mathcal{C}$-objekt være en funktor : $\Delta^{op} \to \mathcal{C}$, mens et kosimplisiellt $\mathcal{C}$-objekt vil være en funktor $\Delta \to \mathcal{C}$. For eksempel hvis vi ser på $\mathcal{T}op$, kategorien av topologiske rom, vil de simplisielle objektene være standard topologiske n-simplekser.

En funktor $X : \Delta^{op} \to \mathcal{E}ns$ kalles en simplisiell mengde. Her er $\mathcal{E}ns$ kategorien av endelige mengder. Disse danner en egen kategori som vi kaller $\mathcal{S}$.

C.3 Fibrasjoner

Ser først på standardsimplekser:

$$\Delta[n] = \{[q] \mapsto \Delta([q],[n])\}$$

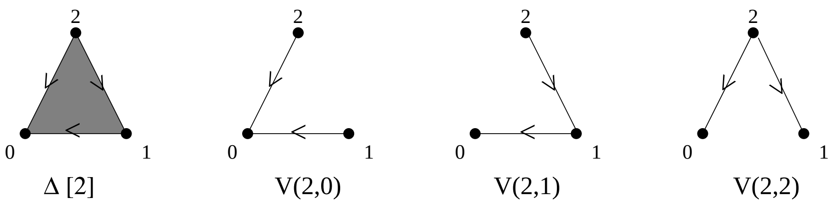
Eksempel C.2

$$\Delta[0] = \{[q] \mapsto \Delta([q],[0])\} = *$$

Her er $*$ ettpunktsmengden, og dette kommer av at det kun er en ordningsbevarende avbildning fra $[q]$ og inn i $[0]$.

På tilsvarende vis realiseres $\Delta[1]$ som en vei, $\Delta[2]$ som et triangel, og så videre.

$V(n,k)$ er en undermengde av $\Delta[n]$ ved at den k-te kanten "taes vekk".



Figur 4: $\Delta[2]$ med tilhørende horn

Definisjon C.3 (Fibrasjon) $f : X \to Y \in \mathcal{S}$ er en fibrasjon dersom for alle diagrammer

$$\begin{tikzcd} V(n,k) \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta[n] \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Y \end{tikzcd}$$

så finnes det en avbildning $-- >$ slik at diagrammet kommuterer.

Definisjon C.4 (Fibrant objekt) $X \in \mathcal{S}$ er fibrant dersom $X \to *$ er en fibrasjon.

Proposisjon C.5 *Ethver avbildning $f : X \to Y \quad \in \mathcal{S}$ kan faktoriseres i en fibrasjon og en kofibrasjon hvor kofibrasjonen (ι) er en svak ekvivalens:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, hook, "\iota"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, two heads, "\pi"'] & \end{tikzcd}$$

Ut fra det ovenstående diagrammet har vi en ny definisjon på homotopifiberet.

Definisjon C.6 (Homotopifiberet) La π være som i diagrammet over, samt $*$ være basispunktet i Y. Da er $\pi^{-1}(*)$ homotopifiberet til f.

Referanser

[DP61] Albrect Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 11:201–312, 1961.

[Dun94] Bjørn I. Dundas. Goodwillie calculus. Notat, 1994.

[EM54] S. Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups H(Π,n) II. *Ann. of Math.*, 60:49–139, 1954.

[Goo] Thomas G. Goodwillie. Calculus III: The taylor series of a homotopy functor. Under utarbeidelse.

[Goo90] Thomas G. Goodwillie. Calculus I: The first derivate of pseudoisotopy theory. *K-Theory*, 4:1–27, 1990.

[Goo92] Thomas G. Goodwillie. Calculus II: Analytic functors. *K-Theory*, 5:295–332, 1992.

[Hat] Allen Hatcher. Algebraic topology. Utkast til bok som kan finnes på: http://www.math.cornell.edu/ hatcher/.

[Hel00] Torbjørn Helvik. Kategoriteori. Technical report, NTNU, 2000.

[Mac98] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, second edition, 1998.

[Spa66] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. McGraw-Hill, 1966.