Torbjørn Helvik
Kategoriteori

Fjerdeklasseprosjekt ved
Institutt for matematiske fag, NTNU

Veiledere: Nils A. Baas og Bjørn I. Dundas

6. juni 2000

NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige
universitet

Innhold

1 Innledning

Forskjellige deler av matematikken benytter seg av forskjellige matematiske strukturer. Algebra har sine grupper, topologi sine topologiske rom og analysen sine hilbertrom. En matematisk struktur består gjerne av objekter samt avbildinger mellom disse som i større eller mindre grad bevarer strukturelle egenskaper ved objektene. Strukturene har mange egenskaper som ligner på hverandre. Det bør derfor være både mulig og gunstig å kunne beskrive ulike strukturer i et felles språk.

Dette er utgangspunktet for kategoriteori. Denne teorien er blitt utviklet fra 50-tallet og frem til idag. Til tross for at den i utgangspunktet til og med av sine grunnleggere ble kalt «general abstract nonsense» har den vist seg å være meget nyttig, og er idag et nærmest uunngåelig redskap om en skal drive med moderne, abstrakt matematikk. Dessuten er den nyttig innen felt som matematisk fysikk og konstruksjon av moderne programmeringsspråk.

I kategoriteori abstraherer en begrepene «objekt» og «avbildning» fra de underliggende matematiske strukturene. Alle teorem og sammenhenger en kan bevise at gjelder i en slik generell setting vil automatisk gjelde i alle strukturer som kan uttrykkes ved hjelp av dette språket. Dessuten fungerer altså kategoriteorien som et stringent universelt matematisk spåk som en blant annet kan bruke til å beskrive analogier mellom ulike matematiske felt.

Jeg starter prosjektrapporten med å presentere en del grunnleggende matematiske strukturer som vil bli mye brukt utover i oppgaven. Så gir jeg definisjonen på en kategori og ser på mange eksempler på kategorier. Fra kapittel 6 definerer jeg grunnleggende begrep som funktor og naturlig transformasjon. Videre tar jeg for meg mer avanserte begrep som grenser og adjungerte. De to siste kapitlene, 14 og 15, er mer spesielle. Her tar jeg for meg en kategori kalt $\mathbf{\Delta}$ og et interessant resultat knyttet til forholdet mellom denne kategorien og kategorier generelt. Rapporten er, med unntak av de to siste kapitlene, ment å være en koherent introduksjon til kategoriteori. Den skal, med litt innsats, være forståelig for medstudenter uten spesiell bakgrunn fra algebra eller topologi.

2 Notasjon

Det aller viktigste i kategoriteori må sies å være funksjonene, så innledende tar jeg for meg endel begreper knyttet til funksjoner, eller avbildninger, mellom mengder.

La X og Y være mengder. En funksjon fra X til Y er en regel som sender hvert element i X til et element i Y. Vi skriver

$$f\colon X \to Y$$

Vi må også si hva hvert element i X går på, og det gjør vi slik

$$x \mapsto f(x)$$

Eller skrevet på én linje:

$$f \colon X \ni x \mapsto f(x) \in Y$$

Vi sier at funksjonen f *treffer* et element $y \in Y$ om det finnes en $x \in X$ med $f(x) = y$. Den delmengden av Y som treffes av f kalles *bildet* til f. Dersom bildet av f er hele Y sier vi at f er *surjektiv* eller *på*. Om det for hver y maks finnes én x som går på y sier vi at f er *injektiv* eller *én-til-én*. I symboler:

$$\begin{aligned} \text{injektiv} &: \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2 \\ \text{surjektiv} &: \ \forall y \in Y \ \ \exists\, x \in X \ \ \text{med} \ \ f(x) = y \end{aligned}$$

En funksjon som har begge disse egenskapene kalles *bijektiv*. Om det finnes en bijektiv funksjon mellom to mengder X og Y kalles disse isomorfe. Vi betegner dette $X \cong Y$

Ofte trenger vi å sette sammen funksjoner. Dette kalles *komposisjon*. Om $f \colon X \to Y$ og $g \colon Y \to Z$ skriver vi sammensetningen $g \circ f \colon X \to Z$. Denne er definert på elementer ved

$$x \mapsto g(f(x))$$

Mange ganger uttrykker vi det at vi har flere mengder og funksjoner som virker mellom disse i et diagram. F.eks.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "h"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "l"'] & Z \end{tikzcd}$$

Slike diagram er spesielt nyttige når vi får samme resultat uansett hvilke piler vi følger. Slike diagram kalles *kommutative*. Diagrammet over er kommutativt om $l \circ k = g \circ f = h$.

Vi skal til slutt definere en *ekvivelensrelasjon*. En ekvivelensrelasjon på en mengde X er en delmengde R av det kartesiske produktet $X \times X$. $x \in X$ er ekvivalent til $y \in X$, skrevet $x \sim y$, om $<x, y> \in R$. Ekvivalensrelasjonen skal tilfredstille

- $x \sim x$ (Refleksivitet)
- $x \sim y \ \Rightarrow \ y \sim x$ (Symmetri)
- $x \sim y$ og $y \sim z \ \Rightarrow \ x \sim z$ (Transitivitet)

En ekvivalensrelasjon R deler X opp i *ekvivalensklasser*. To elementer i X er i samme ekvivalensklasse under R hvis og bare hvis de er ekvivalente. Å dele ut en mengde på en ekvivalensrelasjon R vil si å identifisere alle elementene i hver ekvivalensklasse under R.

3 Grunnleggende matematiske strukturer

3.1 Grupper

Definisjon 1 (Gruppe)
En gruppe $<G, *, e>$ er en mengde, G, som er lukket under en binæroperasjon $*$ og inneholder et element e, slik at de følgende aksiomene holder:

- For alle $a, b, c \in G$ har vi
  $(a * b) * c = a * (b * c)$
  Binæroperasjonen er altså assosiativ.

- For alle $x \in G$ har vi:
  $e * x = x * e = x$
  e er enheten i gruppa.

- For alle $a \in G$ finnes det en $a' \in G$ slik at:
  $a * a' = a' * a = e$
  Alle elementene i gruppen skal altså ha en invers.

Ofte vil vi refere til en gruppe $<G, *, e>$ kun som G og la binæreoperasjonen og enheten være underforstått. Binæreoperasjonen kan f.eks være addisjon eller multiplikasjon.

> **Definisjon:** En gruppe G er *abelsk* dersom binæroperasjonen er kommutativ. Det vil si at $a * b = b * a$ for alle $a, b \in G$

Det vanlig å kalle binæreoperasjonen i en generell abelsk gruppe for $+$, siden addisjon alltid er kommutativt.

Eksempel 2 (Eksempler på grupper)

- Både $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er abelske grupper under addisjon, med 0 som enhet. $\mathbb{N}$ er imidlertid ikke en gruppe, da kun 0 har en invers.

- $\mathbb{R}^*$ og $\mathbb{C}^*$, det vil si mengden av hhv. de reelle og komplekse tall untatt 0, er begge abelske grupper under multiplikasjon, med 1 som enhet.

- Alle reelle, invertible $n \times n$ matriser danner en gruppe under matrisemultiplikasjon. Denne gruppen kalles den generelle lineære gruppen av orden n, og skrives $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Gruppen er abelsk kun når $n = 1$.

- $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ er en abelsk gruppe under addisjon. Enheten er $<1, \ldots, 1>$, og binæroperasjonen er gitt ved $<a_1, a_2 \ldots, a_n> * <a'_1, a'_2 \ldots, a'_n>$ $= <a_1 * a'_1, \ldots, a_n * a'_n>$.

Akkurat som mellom mengder finnes det avbildninger mellom grupper. De interessante avbildningene bevarer strukturen i gruppen, og kalles homomorfier.

Definisjon: En avbildning ϕ fra en gruppe G til en gruppe G' er en *gruppehomomorfi* om

$$\begin{aligned} \phi(a * b) &= \phi(a) * \phi(b) \qquad \forall a, b \in G \\ \phi(e) &= e' \end{aligned}$$

Kravet om at enheten i G skal gå på enheten i G' følger egentlig fra det første kravet. En gruppehomomorfi som er bijektiv er en gruppeisomorfi. Om det finnes en slik isomorfi mellom to grupper kalles de isomorfe.

Eksempel: En reell matrise A er invertibel hvis og bare hvis determinanten er ulik null. Dessuten har vi at for matriser $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vil $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Dette betyr at determinanten er en homomorfisme fra $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ til gruppen $\mathbb{R}^* = \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$.

3.2 Ringer

Definisjon 3 (Ring)
En ring $<R, +, 0, \cdot, 1>$ er en mengde, R, sammen med to binæroperasjoner $+$ og $\cdot$ som kalles addisjon og multiplikasjon, samt to elementer 0 og 1. Mengden er lukket under binæroperasjonene, og de følgende aksiomene skal holde:

- $<R, +, 0>$ er en abelsk gruppe, med enhet 0.
- Multiplikasjon er assosiativt
- For alle $a, b, c \in R$ gjelder de distibutive lovene: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ og $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- 1 er en enhet for mulitiplikasjonen, slik at $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ for alle $a \in R$.

Akkurat som for grupper skriver vi ofte bare R for ringen. En *kommutativ ring* er en ring der multiplikasjonen er kommutativ.

Eksempel 4 (Eksempler på ringer)

- $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$ er kommutative ringer.
- La $M_n(\mathbb{R})$ være samlingen av alle reelle $n \times n$ matriser. Da vil $M_n(\mathbb{R})$ være en ikke-kommutativ ring med nullmatrisa som additiv enhet og enhetsmatrisa, I, som multiplikativ enhet.
- La $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}$. Dette vil være en ring under operasjonene addisjon modulo n og multiplikasjon modulo n. Dette er en ring med et endelig antall elementer.

I en ring kan det være andre elementer enn 1 som har en multiplikativ invers. Spesielt nyttige er ringer der alle elementene unntatt 0 har en invers. Slike kalles kropper. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ og $\mathbb{C}$ er alle kropper, men $\mathbb{Z}$ er ikke kropp siden kun -1 og 1 har inverser her. $\mathbb{Z}_n$ er en kropp kun når n er et primtall.

Definisjon: En *kropp* er en kommutativ ring der alle elementene untatt 0 har en multiplikativ invers

I likhet med gruppehomomorfier har vi ringhomomorfier.

Definisjon: En avbildning ϕ fra en ring R til en ring R' er en *ringhomomorfi* om

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \phi(a)+\phi(b) \qquad \forall a,b \in R \\ \phi(a \cdot b) &= \phi(a)\cdot\phi(b) \qquad \forall a,b \in R \\ \phi(0) &= 0' \qquad \phi(1) = 1' \end{aligned}$$

3.3 Vektorrom

Definisjon 5 (Vektorrom)
La F være en kropp. Et vektorrom over F er en abelsk gruppe V, sammen med en komposisjon som kalles skalarmultiplikasjon:

$$F \times V \ni < r, a > \mapsto ra \in V$$

Følgende aksiomer skal være oppfylt for $r, r' \in F$ og $a, a' \in V$:

- $r(r'a) = (rr')a$
- $(r+r')a = ra + r'a$
- $r(a+a') = ra + ra'$
- $1a = a$

Elementene i F er skalarer og elementene i V er vektorer. Legg merke til at binæreoprasjonen i gruppen V her kalles $+$, siden V er abelsk.

Eksempel 6 (Eksempel på vektorrom)
Se på den abelske gruppen $\mathbb{R}^n$. Vi kan definere en skalarmultiplikasjon for skalerer i $\mathbb{R}$ ved $ra = <ra_1, \ldots, ra_n>$, der $a = <a_1, \ldots, a_n>$. Aksiomene holder, og vi ser at $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$.

Vi har også homomorfier mellom vektorrom.

Definisjon: En avbildning ϕ fra et vektorrom V over F til et annet vektorrom V' over F er en *homomorfi* om den tilfredstiller

$$\phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b) \quad \text{og} \quad \phi(ra) = r\phi(a)$$

for alle $r \in F$ og $a, b \in V$

Ofte utstyrer vi et vektorrom med en *basis*. Den algebraiske definisjonen på en basis for et vektorrom er:

Definisjon: En delmengde $\{a_i \in V, | \, i \in I\}$ av et vektorrom V over F er en *basis* for vektorrommet om hvert element b i rommet entydig kan skrives som en lineærkombinasjon

$$b = \sum_I r_i a_i \quad , r_i \in F$$

For eksempel er de vanlige enhetsvektorene en mulig basis for vektorrommet i eksempel 6. Alle basiser for et gitt vektorrom inneholder like mange elementer. Dersom et vektorrom V har en basis med et endelig antall elementer n, sier vi at V er *n-dimensjonalt.*

Det finnes en struktur som heter *moduler* som ligner mye på vektorrom. Forskjellen ligger i at skalarene kommer fra en generell ring R, og ikke en kropp. Aksiomene er de samme. Vi skiller mellom venstre og høyre R-moduler, alt etter hvilken side vi ganger med skalaren fra. Homomorfier mellom R-moduler er definert på same måte som for vektorrom.

Både ringer, moduler og vektorrom er basert på abelske grupper. Det finnes to viktige måter å legge sammen to abelske grupper på for å få en ny abelsk gruppe.

- Den *direkte summen* $A \oplus B$ av to abelske grupper har det kartesiske produktet $A \times B$ som underliggende mengde. Hvert element i gruppa er et par $<a, b>$, $a \in A$, $b \in B$. Binæroperasjonen er gitt ved $<a, b> + <a', b'> = <a + a', b + b'>$.

- La A, B og G være abelske grupper, og la f være en *bilineær* funksjon $f \colon A \times B \to G$. Det vil si at den tilfredstiller

$$\begin{aligned} f(a + a', b) &= f(a, b) + f(a', b) \\ f(a, b + b') &= f(a, b) + f(a, b') \end{aligned} \tag{1}$$

Tensorproduktet av A og B er en abelsk gruppe $A \otimes B$ og en bilineær funksjon $h \colon A \times B \to A \otimes B$, slik at det for enhver annen bilineær funksjon $f \colon A \times B \to G$ eksisterer en unik gruppehomomorfi $f' \colon A \otimes B \to G$ med følgende diagram kommutativt:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes B \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{2}$$

Elementene i tensorproduktet $A \otimes B$ er alle endelige formelle summer $\sum_i a_i \otimes b_i$ delt ut på ekvivalensrelasjonen gitt ved:

$$(a + a') \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b' + a' \otimes b + a' \otimes b' \tag{3}$$

Dersom A og B er kommutative ringer, blir tensorproduktet $A \otimes B$ også en kommutativ ring.

Dersom A er en høyre R-modul, og B er en venstre R-modul skal en bilineær funksjon i tillegg tilfredstille

$$f(ar, b) = f(a, rb) \qquad \forall r \in R$$

Dette gir et tensorprodukt vi benevner ved $\otimes_R$. Her må vi i tillegg til å dele ut på (3) også dele ut på

$$ar \otimes_R b = a \otimes_R rb$$

Tensorproduktet vi har beskrevet i (2) kan vi skrive $\otimes_{\mathbb{Z}}$ siden enhver abelsk gruppe A er en venstre og høyre $\mathbb{Z}$-modul med skalarmultiplikasjon definert ved

$$na = an = a + a + \cdots + a \qquad -na = a(-n) = a^{-1} + a^{-1} + \cdots + a^{-1}$$

At $f(an, b) = f(a, nb)$ følger fra ligningene (1). Tensorproduktet er unikt opp til isomorfi, og er kommutativt og assosiativt.

3.4 Topologiske rom

Definisjon 7 (Topologisk rom)
Et topologisk rom, $<X, \mathcal{O}_X>$ er en mengde X, sammen med en samling $\mathcal{O}_X$ av delmengder av X som tilfredstiller følgende aksiomer:

- $X \in \mathcal{O}_X$ og $\emptyset \in \mathcal{O}_X$
- $B_1 \in \mathcal{O}_X$ og $B_2 \in \mathcal{O}_X$ impliserer at $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{O}_X$
- $B_\alpha \in \mathcal{O}_X$ impliserer $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \mathcal{O}_X$

Vi kaller delmengdene i $\mathcal{O}_X$ for de åpne delmengdene til X. $\mathcal{O}_X$ kalles en topologi for mengden X. Et eksempel på et topologisk rom er mengden $\mathbb{R}$, med $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ alle unioner av alle åpne intervaller i $\mathbb{R}$.

All strukturen til det topologiske rommet ligger i hvilke delmengder som er åpne. En strukturbevarende funksjon er slik at inversbildet til åpne delmengder selv er åpne delmengder. En slik funksjon kalles kontinuerlig.

Definisjon: En avbildning f fra et topologisk rom $<X, \mathcal{O}_X>$ til et topologisk rom $<Y, \mathcal{O}_Y>$ kalles *kontinuerlig* om det inverse bildet av alle åpne delmengder er åpne. Altså, $O \in \mathcal{O}_Y$ impliserer $f^{-1}[O] \in \mathcal{O}_X$

3.5 Normerte rom

Definisjon 8 (Normert rom)
La E være et vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. En norm på E er en funksjon $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ som tilfredstiller følgende aksiomer:

- $\|x\| > 0$ dersom $x \neq 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ for alle skalarer λ og alle vektorer x
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ for alle vektorer x, y

Et *normert rom* er et par $<E, \| \cdot \|>$ av et vektorrom og en norm på dette.

Normerte rom bygger videre på vektorrom i og med forskjellen ligger i at vi har definert en norm. Men normerte rom er også relatert til topologiske rom. Faktisk definerer hvert normerte rom et topologisk rom

Eksempel 9 (Eksempel på et normert rom)
La $C(X)$ være vektorrommet over $\mathbb{C}$ av alle begrensede, kontinuerlige funksjoner $f : X \to \mathbb{C}$, der X er et topologisk rom. Supremumnormen $\| \cdot \|_\infty$ er gitt ved $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Det er lett å se at denne normen tilfredstiller aksiomene, og $<C(X), \| \cdot \|_\infty>$ blir et normert rom.

Akkurat som for topologiske rom er strukturbevarende funksjoner mellom normerte rom de kontinuerlige funksjonene.

> **Definisjon:** En avbildning f fra et normert rom $<E, \| \cdot \|_E>$ til et normert rom $<F, \| \cdot \|_F>$ kalles *kontinuerlig* om det for alle $x \in E$ og alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en $\delta > 0$ slik at vi for $\xi \in E$ har:
>
> $$\|x - \xi\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(\xi)\|_F < \varepsilon$$

Definisjonen er ekvivalent med den for topologiske rom - at inversen til alle åpne delmengder er åpne. En åpen delmengde av et normert rom er en vilkårlig union av åpne ε-baller.

> **Definisjon:** En åpen ε-ball om y i et normert rom $<E, \| \cdot \|_E>$ er delmengden
>
> $$B_\varepsilon(y) = \{x \in E \mid \|x - y\|_E < \varepsilon\}$$

Dette definerer en topologi på mengden E, og dermed også et topologisk rom.

4 Kategorier - definisjon

Grunnleggende består en kategori av objekter og piler mellom disse. Pilene er avbildninger eller morfismer mellom de forskjellige objektene. I tillegg har vi regler for komposisjon av piler.

Jeg starter med definisjonen av en kategori og ser så på hvordan de ulike strukturene fra kapittel 3 passer inn i denne definisjonen.

Definisjon 10 (Kategori)
En kategori $\mathcal{C}$ er:

- En samling Obj $\mathcal{C}$ - objektene i $\mathcal{C}$.
- En samling morfismer mellom objektene, Morf $\mathcal{C}$. Morfismene kalles gjerne piler.

  For en morfisme, f, skriver vi $f\colon a \to b$ der $a, b \in$ Obj $\mathcal{C}$. Det er to avbildninger fra morfismene til objektene.

  1. $f \mapsto a$. Denne gir kilden til hver morfisme.
  2. $f \mapsto b$. Denne gir målet til hver morfisme.

  Dessuten finnes det en avbildning fra objektene til morfismene.

  1. $c \mapsto Id_c : c \to c$. Denne gir en enhetsmorfisme Id_c for hvert objekt. Id_c skrives også 1_c.

- En regel for komposisjon av morfismene. Dersom $f\colon a \to b$ og $g\colon b \to c$ finnes det i Morf $\mathcal{C}$ en $g \circ f\colon a \to c$. Komposisjonen skal:

  1. Respektere enhet. Det vil si at $Id_b \circ f = f$ og $g \circ Id_b = g$. Dette kan vi skrive i et kommutativt diagram.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & b \arrow[d, "Id_b"] \arrow[dr, "g"] & \\ & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd} \tag{4}$$

  2. Være assosiativ. Det vil si at for $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{k} d$ skal $k \circ (g \circ f) = (k \circ g) \circ f$. Dette er det samme som å si at følgende diagram kommuterer.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & b \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "k \circ g"] & \\ & c \arrow[r, "k"'] & d \end{tikzcd} \tag{5}$$

Vi kan nå konstruere mange kategorier ut ifra strukturene i kapittel 3. Komposisjon av morfismene er i alle tilfeller bare komposisjon av vanlige funksjoner.

Kategori	Objekter	Morfismer/piler
Set	Mengder	Funksjoner mellom mengder
Grp	Grupper	Gruppehomomorfier
Ab	Abelske grupper	Gruppehomomorfier
Rng	Ringer	Ringhomomorfier
CRng	Kommutative ringer	Ringhomomorfier
R-**Mod**	Venstre R-moduler	Homomorfier mellom R-moduler
$\mathbf{Vect}_F$	Vektorrom over F	Homomorfier mellom vektorrom
Top	Topologiske rom	Kontinuerlige avbildninger
Nrm	Normerte rom	Kontinuerlige avbildninger

For hvert par (a, b) av i objekter i en kategori $\mathcal{C}$ finnes det en mengde av alle morfismer som går fra a til b. Denne mengden kaller vi $\hom_{\mathcal{C}}(a, b)$ eller ofte bare $\mathcal{C}(a, b)$. Altså:

Definisjon: $\hom_{\mathcal{C}}(a, b) = \{f \in \text{Morf } \mathcal{C} \mid f : a \to b\}$

Noen objekter i en kategori kan ha spesielle egenskaper. Siden objektene i en kategori ikke har noen indre struktur må slike egenskaper være basert på piler til og fra objektet. Derfor er det pilene som er det essensielle i en kategori. Et objekt a er *finalt* i $\mathcal{C}$, om det for ethvert annet objekt $c \in \mathcal{C}$ finnes nøyaktig en pil $c \to a$. Dette gjelder a selv, og pila $a \to a$ må da være a's enhetspil. Et finalt objekt er unikt opp til isomorfi. Et *initielt* objekt i $\mathcal{C}$ er slik at det finnes nøyaktig en pil $a \to c$ fra objektet til ethvert annet objekt c i $\mathcal{C}$.

Eksempel: I **Set** er ettpunktsmengden et finalt objekt og den tomme mengden et initielt objekt. I **Grp** er gruppa med ett element både finalt og initielt.

5 Kategorier - videre eksempler

Kategoribegrepet er meget bredt. Mens vi f.eks har kategorien av alle grupper, kan vi også se på en gitt gruppe som en egen kategori. Vi skal først se på endel illustrative eksempler, og så ta for oss mange kategorier knyttet til mengder.

5.1 Mer spesielle kategorier

- *Diskrete kategorier*: En kategori er diskret når alle pilene er identiteter. Alle mengder X tilsvarer en diskret kategori, det er bare å legge til en identitetspil for hvert element.

- *Gruppe som en kategori*: En gruppe er en kategori med bare et objekt. Elementene i gruppa er piler fra dette objektet til seg selv, og binæroperasjonen i gruppa tilsvarer komposisjon av piler. Identitespilen er identiten i gruppa og for hver pil finnes det en inverspil.

- *Ekvivalensrelasjon som en kategori*: La M være en mengde og R en ekvivalensrelasjon på M. La objektene i kategorien være elementene i M. Om $<a, a'> \in R$ så er $\hom(a, a') = \{<a, a'>\}$. Ellers er $\hom(a, a') = \emptyset$. Det går altså nøyaktig en pil fra a til a' om disse er ekvivalente, og ellers ingen. Komposisjon av pilene i kategorien uttrykker transitiviteten til ekvivalensrelasjonen.

- *Matriser*: For hver kommutative ring K er $\mathbf{Matr}_K$ en kategori av matriser med elementer i K. Objektene er alle positive heltall. En morfisme $A : n \rightarrow m$ er en $m \times n$ matrise. Komposisjon er det vanlige matriseproduktet.

- $\pi(X)$: X er et topologisk rom, og objektene i $\pi(X)$ er punktene i X. $\hom_{\pi(X)}(x, y)$ er lik mengden av homotopiklasser av veier fra x til y.

  Definisjon: En *vei* fra x til y er en funksjon $f : [0,1] \rightarrow X$, slik at $f(0) = x$ og $f(1) = y$.

  Definisjon: La f og g være funksjoner mellom to topologiske rom, $f, g : Y \rightarrow X$. Funksjonene f og g er homotope om det finnes en kontinuerlig funksjon $F : Y \times I \rightarrow X$, slik at $F(y, 0) = f(y)$ og $F(y, 1) = g(y)$. Dette gir en ekvivalensrelasjon på funksjoner fra Y til X. Ekvivalensklassene til denne relasjonen kalles *homotopiklasser*.

  To veier er homotope om de er homotope som avbildninger $I \rightarrow X$ og dersom homotopien holder endene fiksert (altså $F(0, s) = x$ og $F(1, s) = y \quad \forall s$). Komposisjonen av to veier f og g er gitt ved:

$$(g \circ f)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq 0,5 \\ g(2t-1) & 0,5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

  Komposisjon av veier er ikke assosiativt, men uansett i hvilken rekkefoelge vi komponerer en mengde veier, vil resultatet havne i samme homotopiklasse. Vi kan nemlig definere en homotopi $F \colon I \times I \rightarrow X$ fra veien $h \circ (g \circ f)$ til veien $(h \circ g) \circ f$ ved

$$F(t, s) = \begin{cases} f(\frac{4t}{s+1}) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4} + \frac{s}{4} \\ g(4(t - \frac{1}{4} - \frac{s}{4})) & \frac{1}{4} + \frac{s}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} + \frac{s}{4} \\ h(\frac{4}{2-s}(t - \frac{1}{2} - \frac{s}{4})) & \frac{1}{2} + \frac{s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

  Så komposisjon av homotopiklasser er assosiativt, og $\pi(X)$ er en kategori.

5.2 Kategorier relatert til mengder

- **Set**: Denne kategorien har vi allerede definert som kategorien av alle mengder med alle funksjoner mellom dem. Egentlig er det kategorien av alle små mengder. Små betyr imidlertid ikke endelige, men at mengdene tilhører et univers U. Dette må til for at ting skal stemme med mengde-teorien, men jeg skal ikke bry meg noe videre om dette i denne oppgaven. Se [ML, Kap. I, § 6] for en fullstendig diskusjon.

- $\mathbf{Set}_*$: Objektene er alle små mengder med et valgt basispunkt. Morfismene er funksjoner som sender basispunkt på basispunkt.

- $\boldsymbol{\Delta}$: Dette er en *skjelettkategori* for kategorien av alle endelige, ikke-tomme, ordnede mengder. En skjelettkategori har kun ett objekt for hver isomorfiklasse av objekter i den fullstendige kategorien. Altså finnes det i $\boldsymbol{\Delta}$ bare et objekt med en gitt kardinalitet, nemlig $\{0 < 1 < \cdots < n\}$. Vi skriver $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, for $n \geq 0$. Morfismene er ordningsbevarende funksjoner. For en morfisme f må $f(i) \leq f(j)$ dersom $i < j$. $\boldsymbol{\Delta}$ har et finalt objekt, nemlig $[0]$, men intet initielt objekt.

- **Ord**: Dersom en tar med den tomme mengden i $\boldsymbol{\Delta}$ får en kategorien **Ord**. Den tomme mengden er et initielt objekt i **Ord**.

- **[q]**: Dette er et objekt i kategorien $\boldsymbol{\Delta}$, og kan sees på som en egen kategori. Objektene er heltall fra 0 til og med q. Ordningen er bevart ved at hvert objekt har en pil til objektet over, så kategorien ser slik ut: $0 \to 1 \to \ldots \to q$. Komposisjon av disse pilene gir at hvert objekt har en pil til ethvert høyere objekt.

- $\boldsymbol{\Gamma^o}$: En skjelettkategori for kategorien av alle endelige, punkterte mengder. Punktert betyr med valgt basispunkt. Vi skriver et objekt i $\boldsymbol{\Gamma^o}$ som $n_+ = \{0, 1, \ldots, n\}$ for $n \geq 0$, der 0 er basispunktet. Pilene er funksjoner som sender basispunkt på basispunkt.

- **Fin**: Skjelettkategorien av endelige mengder.

- $\mathcal{P}(X)$: Potensmengdekategorien til X, der X er en mengde. Objektene i kategorien er lik alle delmengder av X. La $A, B \subset X$. Dersom $A \subset B$ vil $\hom_{\mathcal{P}(X)}(A, B) = f$, der f er inklusjonen av A i B. Om $A \not\subset B$ er $\hom_{\mathcal{P}(X)}(A, B) = \emptyset$.

6 Funktorer

Vi vil ofte vil ha behov for å bevege oss mellom kategorier. En «homomorfisme» mellom kategorier kalles for en funktor. En funktor sender objekter på objekter og morfismer på morfismer, og bevarer identiteter og komposisjon.

Definisjon 11 (Funktor)
La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være kategorier. Da vil en *funktor* $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funksjon som sender objekter på objekter og morfismer på morfismer. Funktorer bevarer identitet og komposisjon. Det vil si at for $c \in \mathsf{Obj}\ \mathcal{C}$ vil $T(1_c) = 1_{Tc}$ og for $g, f \in \mathsf{Morf}\ \mathcal{C}$ vil $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$, dersom komposisjonen er definert i $\mathcal{C}$.

Legg merke til at dette betyr at en morfisme $f : a \to b$ i $\mathcal{C}$ vil sendes til en morfisme $Tf : Ta \to Tb$ i $\mathcal{D}$.

Eksempel 12 (Eksempler på funktorer)

- Et enkelt eksempel er potensmengdefunktoren $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$. Objektfunksjonen sender hver mengde X til potensmengden, som er mengden av alle delmengdene til X. Morfismefunksjonen sender hver funksjon $f : X \to Y$ til funksjonen

$$Pf : PX \ni S \mapsto f[S] \in PY$$

  Siden $P(1_X) = 1_{Px}$ og $P(g \circ f) = Pg \circ Pf$ er det klart at P er en funktor.

- La K være en kommutativ ring. Mengden av alle invertible $n \times n$ matriser med elementer i K vil da være en gruppe under matrisemultiplikasjon, skrevet $\mathsf{GL}_n(K)$. Hver ringhomomorfi $f : K \to K'$ danner en gruppehomomorfi $\mathsf{GL}_n f : \mathsf{GL}_n(K) \to \mathsf{GL}_n(K')$ ved at en bytter ut elementene i hver matrise med de korresponderende elementene i K'. F.eks., om $a, b \in K$ og $a', b' \in K'$ med $f(a) = a'$ og $f(b) = b'$ vil

$$\mathsf{GL}_2(\mathsf{f})\colon \mathsf{GL}_2(K) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \in \mathsf{GL}_2(K')$$

  Dette definerer for hvert naturlige tall en funktor GL_n: $\mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$

En funktor som rett og slett «glemmer» hele eller deler av strukturen til et algebraisk objekt kalles en *glemsom* funktor. Et eksempel på en glemsom funktor er $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, som sender hver gruppe G til mengden av elementene UG og glemmer binæroperasjonen og enheten, og dermed gruppestrukturen. Hver gruppehomomorfi $f : G \to G'$ sendes til den samme funksjonen, betraktet som en funksjon mellom mengder.

En *bifunktor* er en funktor med to argumenter. Vi kan se på denne som en vanlig funktor ved å definere en produktkategori. Om $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er kategorier, er $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ en (produkt)kategori der objektene er par $<c, d>$ med c et objekt i $\mathcal{C}$ og d et objekt i $\mathcal{D}$. Pilene i $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ er likedan par av piler fra de to kategoriene. En bifunktor med verdier i en kategori $\mathcal{A}$ er da en funktor $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{A}$. Et eksempel på en bifunktor er det vanlige kartesiske produktet mellom mengder $\times\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.

Med begrepet funktor kan vi danne kategorien av alle små kategorier, skrevet $\mathbf{Cat}$. Objektene i denne kategorien er kategorier, mens morfismene er funktorer. Komposisjon av funktorer fungerer akkurat som komposisjon av vanlige funksjoner, og hver kategori har sin enhetsfunktor som sender alle objekter og piler på seg selv.

7 Motsatte kategorier, kontravarians og dualitet

Til enhver kategori $\mathcal{C}$ kan vi assosiere en motsatt kategori $\mathcal{C}^o$. Denne kategorien får vi ved å snu retningen på alle pilene. Objektene til $\mathcal{C}^o$ er de samme som objektene til $\mathcal{C}$, og vi har en én-til-én korrespondanse mellom pilene, $(f\colon a\to b) \mapsto (f^o\colon b\to a)$.

Se på en funktor $S\colon \mathcal{C}^o\to\mathcal{D}$. Den sender hvert objekt $c \in \mathcal{C}^o$ til et objekt $d \in \mathcal{D}$, og hver pil $f^o\colon b\to a$ til en pil $Sf^o\colon Sb\to Sa$ i $\mathcal{D}$. Denne funktoren kan uttrykkes direkte ved den orginale kategorien $\mathcal{C}$ dersom vi skriver $\overline{S}f$ for Sf^o. Da er $\overline{S}$ en *kontravariant* funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$. Den sender hver pil $f\colon a\to b$ i $\mathcal{C}$ til en pil $\overline{S}f\colon \overline{S}b\to\overline{S}a$ i $\mathcal{D}$ (i den motsatte retningen), slik at vi har:

$$\overline{S}(1_c) = 1_{\overline{S}c}, \qquad \overline{S}(f\circ g) = \overline{S}(g)\circ\overline{S}(f)$$

Legg merke til at morfismefunksjonen til en kontravariant funktor inverterer komposisjonsrekkefølgen.

Eksempel 13 (Kontravariant funktor)
Vi har også en kontravariant potensmengdefunktor, $\overline{P}\colon \mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$. Objektfunksjonen sender hver mengde X til potensmengden, mens morfismefunksjonen sender hver funksjon $f : X\to Y$ til funksjonen som sender hver delmengde $T \subset Y$ til sitt inversbilde i X:

$$\overline{P}f : \overline{P}Y \ni T \mapsto f^{-1}[T] \in \overline{P}X$$

I motsetning er en vanlig funktor $T\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ som definert i kap 6 en *kovariant* funktor. Generelt er det gunstig å betrakte en kontravariant funktor $\overline{S}$ fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$ som en kovariant funktor $S\colon \mathcal{C}^o\to\mathcal{D}$. I denne rapporten vil derfor piler mellom kategorier alltid være kovariante funktorer.

Hom-funktorer er meget viktige eksempler på kovariante og kontravariante funktorer fra en generell kategori til **Set**. Husk definisjonen av en hom-mengde: $\hom_{\mathcal{C}}(a,b) = \{f \in \mathrm{Morf}\ \mathcal{C} \mid f\colon a\to b\}$. For hvert objekt $a \in \mathcal{C}$ er det definert en *kovariant* hom-funktor slik:

$$\hom(a,-)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{Set}$$

Objektfunksjonen sender hvert objekt $b \in \mathcal{C}$ til mengden $\hom(a,b)$, og morfismefunksjonen sender morfismen $k\colon b\to b'$ til funksjonen

$$\hom(a,k)\colon \hom(a,b) \ni f \mapsto k\circ f \in \hom(a,b')$$

Funksjonen $\hom(a,k)$ kalles ofte, når en dropper objektet a, bare k_* og benevnes komposisjon med k på venstresiden.

For hvert objekt $b \in \mathcal{C}$ er det også definert en *kontravariant* hom-funktor:

$$\hom(-, b) \colon \mathcal{C}^o \to \mathbf{Set}$$

Objektfunksjonen her sender hvert objekt $a \in \mathcal{C}$ til mengden $\hom(a, b)$, og morfismefunksjonen sender morfismen $g \colon a \to a'$ til funksjonen

$$\hom(g, b) \colon \hom(a', b) \ni f \mapsto f \circ g \in \hom(a, b)$$

Funksjonen $\hom(g, b)$ kalles ofte bare g^* og benevnes komposisjon med g på høyresiden.

Tilslutt kan vi definere en hom-funktor som tar to argumenter. Denne blir en bifunktor:

$$\hom(-, -) \colon \mathcal{C}^o \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$$

Objektfunksjonen er innlysende, og morfismefunksjonen sender morfismen $<g^o, k>$ med $g \colon a' \to a$ i $\mathcal{C}$ og $k \colon b \to b'$ i $\mathcal{C}$ til funksjonen

$$\hom(g, k) \colon \hom(a, b) \ni f \mapsto k \circ f \circ g \in \hom(a', b')$$

Motsatte kategorier legger grunnlaget for det viktige prinsippet *dualitet* innen kategoriteori. Det går ut på at ethvert begrep vil ha et korresponderende begrep i den motsatte kategorien. F.eks. er finalt objekt dualbegrepet til initielt objekt, siden et initielt objekt blir finalt i den motsatte kategorien, og vice versa. Et finalt objekt er faktisk entydig definert om vi definerer et initielt objekt og sier at et finalt objekt er dualbegrepet. Vi skal se mange eksempler på dualitet etter hvert.

8 Naturlige transformasjoner

Begrepet naturlig transformasjon eksisterte før kategoriteorien ble oppfunnet. Det å få en skikkelig matematisk definisjon av naturlige transformasjoner var faktisk en årsak til at teorien ble initiert; Eilenberg og Mac Lane, teoriens grunnleggere, bemerket at «Kategori har blitt definert for å kunne definere en funktor, og funktor har blitt definert for aa kunne definere en naturlig transformasjon».

Definisjon 14 (Naturlig transformasjon)
Gitt to kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ og to funktorer $S, T \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. En *naturlig transformasjon* $\tau \colon S \dot{\to} T$ er en tilordning som til hvert objekt $c \in \mathcal{C}$ gir en morfisme

$$\tau_c = \tau c \colon S(c) \longrightarrow T(c)$$

i $\mathcal{D}$ slik at for alle morfismer $f \colon c \to c'$ i $\mathcal{C}$ så kommuterer diagrammet

$$\begin{tikzcd} S(c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "S(f)"'] & T(c) \arrow[d, "T(f)"] \\ S(c') \arrow[r, "\tau_{c'}"] & T(c') \end{tikzcd}$$

Dersom vi ser på funktoren S som et bilde i $\mathcal{D}$ av alle objektene og pilene i $\mathcal{C}$, er en naturlig transformasjon τ en samling av piler som oversetter fra bildet S til bildet T, med alle kvadrater (som det over) kommutative.

Eksempel 15 (Naturlig transformasjon)
Determinanten er en naturlig transformasjon. La K være en kommutativ ring. Funktoren GL_n er definert i eksempel 12. La K^* benevne gruppen av elementer i K med en multiplikativ invers, og la $\det_K M$ være determinanten til matrisa $M \in \mathsf{GL}_n(K)$. Siden M er ikke-singulær vil determinanten være et invertibelt element i ringen K, og dermed er determinanten en homomorfi mellom grupper, $\det_K \colon \mathsf{GL}_n(K) \to K^*$. Hver homomorfi $f \colon K \to K'$ mellom kommutative ringer gir et kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd}
GL_nK \arrow[r, "det_K"] \arrow[d, "GL_nf"] & K^* \arrow[d, "f"] \\
GL_nK' \arrow[r, "det_{K'}"] & K'^*
\end{tikzcd}$$

Grunnen til at diagrammet er kommutativt er egenskapen $f(ab+cd) = f(a)f(b)+f(c)f(d)$ til ringhomomorfier.

$\tau_a, \tau_b, \tau_c, \cdots$ kalles komponentene til den naturlige transformasjonen τ. En naturlig transformasjon τ der alle komponentene er invertible i $\mathcal{D}$ kalles en naturlig isomorfi. Dette skrives $\tau \colon S \cong T$. I dette tilfellet er inversene $(\tau_c)^{-1}$ komponenter i en naturlig transformasjon $\tau^{-1} \colon T \dot{\to} S$

To kategorier, $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$, er isomorfe når det finnes et par av funktorer, $S \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og $T \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, slik at $I_C = T \circ S$ og $I_D = S \circ T$, der I er identitetsfunktoren til en kategori. Mer generelt kan to kategorier være ekvivalente. I dette tilfeller trenger ikke komposisjonene av S og T være lik identitesfunktorene, men de må være naturlig isomorfe til dem.

Definisjon 16 (Ekvivalente kategorier)
En *ekvivalens* mellom to kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er et par av funktorer, $S \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og $T \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, sammen med naturlige isomorfier $I_C \cong T \circ S$ og $I_D \cong S \circ T$

Dette begrepet gir oss mulighet til å sammenligne kategorier som ligner på hverandre, men er av svært ulik størrelse, slik eksempelet under viser.

Eksempel 17 (Ekvivalente kategorier)
La F være en kropp. Kategorien $\mathbf{Matr}_F$ er som definert i kap. 5.1. Kategorien $\mathbf{Vect}_F^B$ er kategorien av endeligdimensjonale vektorrom over F med valgt basis. Objektene i $\mathbf{Vect}_F^B$ er par (V, B), der V er et vektorrom og B en basis for dette. Morfismene i $\mathbf{Vect}_F^B$ er lineærtransformasjoner. Disse kan representeres ved matriser. En basis B er en isomorfi fra vektorrommet $F^{\mathsf{dim}V}$ til V. Basisvektorene

til V blir da bildene av $(1,0,\ldots,0)$, $(0,1,\ldots,0)$,$\ldots,(0,0,\ldots,1) \in F^{\mathsf{dim}V}$. Om f er en lineærtransformasjon kan vi fremstille dette i følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & V' \\
F^{\mathsf{dim}V} \arrow[u, "B", "\cong"'] \arrow[r, dotted, "f'"] & F^{\mathsf{dim}V'} \arrow[u, "B'", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

De følgende funktorer definerer en ekvivalens mellom $\mathbf{Vect}_F^B$ og $\mathbf{Matr}_F$:

S : $\mathbf{Vect}_F^B \to \mathbf{Matr}_F$
Obj : $(V,B) \mapsto$ dim V
Morf : $f \mapsto$ Matrisa til $(B'^{-1} f B)$

T : $\mathbf{Matr}_F \to \mathbf{Vect}_F^B$
Obj : $n \mapsto (F^n$,naturlig basis)
Morf : $M \mapsto$ Lin.transf. gitt ved matrisa

Naturlig basis betyr at basisisomorfien er identitetsfunksjonen. Vi har at $S \circ T = I_{\mathbf{Matr}_F}$, mens $T \circ S$ sender hvert vektorrom til et med samme dimensjon og naturlig basis. Men basisisomorfiene B er komponentene i en naturlig isomorfi mellom $I_{\mathbf{Vect}_F^B}$ og $T \circ S$. Vi får følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
(V,B) \arrow[d, "f"] & (F^{\mathsf{dim}V}, \mathsf{nat}) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "(T\circ S)f"'] & (V,B) \arrow[d, "f"] \\
(V',B') & (F^{\mathsf{dim}V'}, \mathsf{nat}) \arrow[r, "B'"] & (V',B')
\end{tikzcd}$$

Dermed ser vi at de to kategoriene er ekvivalente. Kategorien $\mathbf{Vect}_F$ av vektorrom uten valg av basis er også ekvivalent til disse to kategoriene. Ekvivalensen mellom $\mathbf{Vect}_F$ og $\mathbf{Vect}_F^B$ er gitt ved funktorene

U : $\mathbf{Vect}_F^B \to \mathbf{Vect}_F$
Obj : $(V,B) \mapsto V$
Morf : $f \mapsto f$

K : $\mathbf{Vect}_F \to \mathbf{Vect}_F^B$
Obj : $V \mapsto (V, B_V)$
Morf : $f \mapsto f$

B_V er en basis vi står fritt til å velge selv. Vi må velge en slik basis for hver $V \in$ Obj $\mathbf{Vect}_F$. Lineærtransformasjonene er uavhengig av valg av basis, så funktorene gjør ingenting med dem. Funktoren $U \circ K$ er identiteten og komponentene i den naturlige isomorfien $I_{\mathbf{Vect}_F^B} \cong K \circ U$ kan vi rett og slett la være identetsavbildninger.

Sammenhengen mellom en kategori og en skjelettkategori for denne er nettopp at de er ekvivalente.

Naturlige transformasjoner kan en se på som funksjoner mellom funktorer, så nå kan vi danne kategorier av funktorer, såkalte funktorkategorier.

Definisjon 18 (Funktorkategori)
Gitt to kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$. Vi kan danne en *funktorkategori* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} = \mathsf{Funkt}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. Objektene er alle funktorer $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og morfismene er alle naturlige transformasjoner mellom to slike funktorer. For hom-mengdene kan vi skrive:

$$\mathsf{Nat}(S,T) = \mathsf{hom}_{\mathcal{D}^{\mathcal{C}}}(S,T) = \mathcal{D}^{\mathcal{C}}(S,T) = \{\tau \mid \tau\colon S \dot{\to} T \text{ naturlig}\}$$

Kategorien er veldefinert fordi komposisjon av naturlige transformasjoner er veldefinert og assosiativ. Som eksemplene under viser blir objektene i funktorkategorien gjerne betraktet som den gitte funktorens bilde i kategorien $\mathcal{D}$.

Eksempel 19 (Funktorkategorier)

- La $\mathcal{D} = \{0,1\}$ være en diskret kategori med to elementer og $\mathcal{C}$ være lik en annen diskret kategori. $\{0,1\}^{\mathcal{C}}$ vil akkurat som $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ ha alle delmengder av $\mathcal{C}$ som objekter, men vil ikke ha noen piler mellom objektene.

- La $\mathbf{2}$ være kategorien med to objekter og kun en pil mellom dem. $\mathcal{D}^{\mathbf{2}}$ har som objekter alle piler $f\colon a \to b$ i $\mathcal{D}$. Pilene $f \to f'$ i $\mathcal{D}^{\mathbf{2}}$ er par av piler $<h,k>$ i $\mathcal{D}$ slik at kvadratet under kommuterer:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & a' \arrow[d, "f'"] \\ b \arrow[r, "k"] & b' \end{tikzcd}$$

9 Universalitet

Universelle konstruksjoner er svært vanlige i matematikk. En slik konstruksjon inneholder et objekt som alle piler «faktoriserer» gjennom, på en måte vi skal klargjøre etterhvert. Et godt eksempel på en universell konstruksjon er tensorproduktet av to abelske grupper. Vi begynner med å se på definisjonen av en universell pil. Denne er ikke så grei å få tak på med en gang, men vi skal straks få bruk for begrepet til å definere koprodukt og kogrenser i kategorier.

Definisjon 20 (Universell pil)
La $S\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være en funktor og d et objekt i D. En universell pil fra d til funktoren S er et par $<r,u>$ som består av et objekt r i $\mathcal{C}$ og en pil $u\colon d \to Sr$ i $\mathcal{D}$. Dette paret har egenskapen at for hvert par $<c,f>$ med c et objekt i $\mathcal{C}$ og

$f\colon d \to Sc$ en pil i $\mathcal{D}$ eksisterer en unik pil $f'\colon r \to c$ i $\mathcal{C}$ med $Sf' \circ u = f$. Dette kan fremstilles i følgende kommutative diagram:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Sr \arrow[d, dotted, "Sf'"] & r \arrow[d, "f'"] \\ & Sc & c \end{tikzcd} \tag{6}$$

Med andre ord kan vi si at enhver pil f til S faktoriserer unikt gjennom den universelle pilen u.

Eksempel 21 (Basis til vektorrom)
La $U\colon \mathbf{Vect_F} \to \mathbf{Set}$ være den glemsomme funktoren fra kategorien av vektorrom over kroppen F til mengder. Den sender hvert vektorrom V til mengden av sine elementer. For en mengde X er V_X vektorrommet med X som basis. V_X består av alle F-linære kombinasjoner av elementene i X. Funksjonen $j\colon X \to U(V_X)$ i $\mathbf{Set}$ sender hvert element i X til seg selv betraktet som en vektor i V_X. For ethvert annet vektorrom W kan en funksjon $f\colon X \to U(W)$ unikt utvides til en linærtransformasjon $f'\colon V_X \to W$ med $Uf' \circ j = f$, gitt eksplisitt ved $f'(\sum r_i x_i) = \sum r_i(f x_i)$. Dette utrykker nøyaktig det faktumet at j er en universell pil fra X til U.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "f"'] & U(V_X) \arrow[d, dotted, "Uf'"] & V_X \arrow[d, "f'"] \\ & U(W) & W \end{tikzcd}$$

Dualbegrepet til en universell pil fra d til funktoren S er en universell pil fra S til d. Definisjonen av denne får vi ved å snu alle pilene i (6). Altså, om $<r, u>$ er en slik universell pil fra S til d vil det for enhver pil $f\colon Sc \to d$ i $\mathcal{D}$ finnes en unik $f'\colon c \to r$ i $\mathcal{C}$ med $u \circ Sf' = f$

Universalitetsegenskapen kan uttrykkes ved hom-mengder. Vi har nemlig at paret $<r, u\colon d \to Sr>$ er en universell pil fra d til S hvis og bare hvis funksjonen φ_c som sender hver $f'\colon r \to c$ til $Sf' \circ u\colon d \to Sc$ er en bijeksjon mellom hom-mengder:

$$\varphi_c\colon\ \mathcal{C}(r, c) \cong \mathcal{D}(d, Sc)$$

Vi ser greit at dette stemmer for eksempel 21.

10 Koprodukt og kogrenser

Vi skal her presentere flere generelle universelle konstruksjoner som spiller en meget viktig rolle innen kategoriteori.

10.1 Koprodukt

La a og b være to objekter i en kategori $\mathcal{C}$. Koproduktet til a og b er et objekt c i $\mathcal{C}$ og to piler $i: a \to c$ og $j: b \to c$ slik at det for ethvert par av piler fra a og b til et felles domene d, $f: a \to d$ og $g: b \to d$, finnes en unik $h: c \to d$ med $h \circ i = f$ og $h \circ j = g$. Pilene i og j kalles injeksjoner. c kalles koprodukt objektet, og skrives $a \amalg b$. Koproduktegenskapen er det samme som å si at følgende kommutative diagram alltid kan fylles ut med en unik h.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & a \amalg b \arrow[d, dotted, "h"] & b \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & d & \end{tikzcd} \tag{7}$$

Tilordningen $<f, g> \mapsto h$ er altså en bijeksjon mellom hom-mengder:

$$C(a, d) \times C(b, d) \cong C(a \amalg b, d) \tag{8}$$

med invers $h \mapsto <hi, hj>$

Eksempel 22 (Koprodukt i Set)
I kategorien **Set** er koproduktet $a \amalg b$ den disjunkte unionen av mengdene a og b (altså en union der alle elementene i a betraktes som forskjellig fra alle elementene i b). Injeksjonene i og j er inklusjoner. En funksjon h på en slik disjunkt union er unikt bestemt ved å uavhengig gi dens verdier på mengdene a og b. Altså ved å gi komposisjonene hi og hj. Dette er ekvivalent med å si at diagram (7) kan fylles ut med en unik h.

Koproduktet er faktisk en universell pil. La diagonalfunktoren $\Delta: \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ være definert på objekter ved $\Delta(c) = <c, c>$ og på morfismer ved $\Delta(f) = <f, f>$. Koproduktet til a og b er nå en universell pil fra $<a, b> \in \mathrm{obj}(\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ til funktoren Δ. Det er gitt ved objektet $a \amalg b$ i $\mathcal{C}$ og morfismen $<i, j>$:

$$\begin{tikzcd} <a, b> \arrow[r, "<i,j>"] \arrow[dr, "<f,g>"'] & <a \amalg b, a \amalg b> \arrow[d, dotted, "<h,h>"] \\ & <d, d> \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \amalg b \arrow[d, "h"] \\ d \end{tikzcd}$$

Koproduktet kan intuitivt sies å være summen av to objekter i en kategori, og det eksisterer i mange kjente kategorier under forskjellige navn. Det eksisterer imidlertid ikke i alle kategorier. Oversikten under viser hva det er i et utvalg kategorier:

Set	Disjunkt union av mengder
Top	Disjunkt union av rom
Ab, R-**Mod**	Direkte sum av grupper, $A \oplus B$
CRng	Tensorprodukt av kommutative ringer, $R \otimes S$

Koproduktet kan så klart også defineres for flere enn to elementer som en naturlig utvidelse av definisjonen for to elementer.

10.2 Pushouts

La $f\colon a \to b$ og $g\colon a \to c$ være piler med en felles kilde a i $\mathcal{C}$. En pushout av $<f, g>$ er et kommutativt kvadrat slik det til venstre under

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & b \arrow[d, "u"] \\ c \arrow[r, "v"] & r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & b \arrow[d, "h"] \\ c \arrow[r, "k"] & s \end{tikzcd}$$

slik at det for ethvert annet kommutativt kvadrat bygget på f og g, som det til høyre over, finnes en unik funksjon $t\colon r \to s$ med $t \circ u = h$ og $t \circ v = k$.

Sagt på en annen måte, pushouten er en universell måte å fylle ut et kommutativt kvadrat på når sidene f og g er gitt. Hjørnet r skrives ofte som koproduktet av b og c 'over a':

$$r = b \amalg_a c = b \amalg_{<f,g>} c$$

Oppsummert blir pushoutegenskapen det samme som å si at følgende kommutative diagram alltid kan fylles ut med en unik t, når kvadratet $acsb$ er kommutativt:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & b \arrow[d, "u"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ c \arrow[r, "v"] \arrow[drr, bend right, "k"] & b \amalg_a c \arrow[dr, dotted, "t"] & \\ & & s \end{tikzcd}$$

Eksempel 23 (Pushouts i Set)
I **Set** eksisterer pushouten av $<f, g>$ alltid. Den er den disjunkte unionen $b \amalg c$ med elementene fx og gx identifisert for hver $x \in a$.

Akkurat som koproduktet eksisterer ikke pushouten alltid i alle kategorier. Et eksempel på en slik kategori er $\mathbf{\Delta}$.

10.3 Kogrenser

La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{J}$ være kategorier. $\mathcal{J}$ er en indekskategori, og er ofte liten. Diagonalfunktoren

$$\Delta\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \tag{9}$$

sender hvert objekt c til den konstanten funktoren $\Delta c\colon \mathcal{J}\to\mathcal{C}$. Denne funktoren sender hvert objekt i $\mathcal{J}$ til c, og hver pil i $\mathcal{J}$ til 1_c - identitetsmorfismen til c. Om $f\colon c\to c'$ er en pil i $\mathcal{C}$ vil $\Delta f\colon \Delta c\dot{\to}\Delta c'$ være en naturlig transformasjon som har verdien f for hvert objekt i $\mathcal{J}$.

Enhver funktor $F\colon \mathcal{J}\to\mathcal{C}$ er et objekt i $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. En pil fra F til Δc i $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ er en naturlig transformasjon $\tau\colon F\dot{\to}\Delta c$. Den har en komponent $\tau_i\colon F_i\to c$ for hvert objekt $i\in\mathcal{J}$. Egenskapene til en naturlig transformasjon gir at at følgende diagram (i kategorien $\mathcal{C}$) skal kommutere (her for et spesielt valg av $\mathcal{J}$):

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[drr, bend right, "\tau_1"'] & F_2 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dr, "\tau_2"'] & F_3 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\tau_3"] & F_4 \arrow[dl, "\tau_4"] & F_5 \arrow[l] \arrow[dll, bend left, "\tau_5"] \\
 & & c & &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

På grunn av utseende til diagrammet kalles en naturlig transformasjon $\tau\colon F\dot{\to}\Delta c$ en *kjegle* fra F til objektet c.

En universell pil fra F til funktoren Δ kalles et *kogrensediagram*. Det består av et objekt r i $\mathcal{C}$ sammen med en naturlig transformasjon $\mu\colon F\dot{\to}\Delta r$, altså en kjegle μ fra F til r. Vi skriver $r=\varinjlim F$ eller $r=\mathrm{Kolim}F$. Kogrensediagrammet har egenskapen at for hver kjegle τ fra F til et objekt c i $\mathcal{C}$, eksisterer det en unik pil $t\colon \varinjlim F\to c$ med $\tau_i=t\circ\mu_i$ for hver indeks $i\in\mathcal{J}$.

Eksempel 24 (Kogrenser i Set)

- I **Set** eksisterer alle kogrenser. La $\{F_i\,|\,i\in\mathcal{J}\}$ være objektene i **Set** som blir truffet av funktoren F. $\coprod_i F_i$ er den disjunkte unionen av disse. Definér følgende ekvivalensrelasjon på $\coprod_i F_i$: $a\sim b$ dersom det finnes en $f\in \mathrm{Morf}\mathcal{J}$ med $(Ff)(b)=a$ eller $(Ff)(a)=b$. Kogrensen til F er $\coprod_i F_i$ delt ut på denne ekvivalensrelasjonen.

- La $\mathcal{J}=[\mathbf{q}]=\{0\to1\to\ldots\to q\}$, og se på en funktor $F\colon[\mathbf{q}]\to\mathbf{Set}$ som sender hver $i\in[\mathbf{q}]$ til en delmengde av F_{i+1}. Pilene sendes til inklusjoner (fra delmengden F_i inn i F_{i+1}). En slik funktor er rett og slett en følge av mengder $F_0\subset F_1\subset\cdots\subset F_q$, og kogrensen $\varinjlim F$ blir unionen av mengdene, altså F_q.

Legg merke til at koprodukt og pushouts kun er spesialtilfeller av kogrenser. For koproduktet er $\mathcal{J}$ lik den diskrete kategorien $\{0,1\}$, og for pushouts er $\mathcal{J}$ lik kategorien som består av to piler med felles kilde.

11 Produkt og grenser

11.1 Grenser

Begrepet *grense* er det duale begrepet til kogrense. La diagonalfunktoren Δ være som i 10.3. Grensediagrammet til $F\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ består av et objekt r i $\mathcal{C}$, skrevet $r = \varprojlim F$ eller $r = \text{Lim } F$, og en naturlig transformasjon $\nu\colon \Delta r \dot{\to} F$. Denne naturlige transformasjonen ν kalles en kjegle fra objektet r til F, og kan skrives som et kommutativt diagram (igjen med et spesielt valg av $\mathcal{J}$):

$$
\begin{tikzcd}
 & & r \arrow[dll, bend right, "\nu_1"'] \arrow[dl, "\nu_2"'] \arrow[d, "\nu_3"] \arrow[dr, "\nu_4"] \arrow[drr, bend left, "\nu_5"] & & \\
F_1 & F_2 \arrow[l] \arrow[r] & F_3 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & F_4 & F_5 \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

Grensediagrammet har den egenskapen at for hver kjegle σ fra et objekt c i $\mathcal{C}$ til F eksisterer det en unik morfisme $t\colon c \to \varprojlim F$ med $\sigma_i = \nu_i \circ t$ for alle indekser $i \in J$. Husk at i begrepet kjegle ligger det at det tilhørende diagrammet (som f.eks. (11)) er kommutativt.

Egenskapene til Lim og Kolim kan oppsummeres i diagrammet

$$
\begin{tikzcd}
\text{Lim} F \arrow[r, squiggly, "\nu"] & F \arrow[r, squiggly, "\mu"] \arrow[dr, squiggly, "\tau"] & \text{Kolim} F \arrow[d, dotted] \\
c \arrow[u, dotted] \arrow[ur, squiggly, "\sigma"] & & d
\end{tikzcd}
$$

Der $\rightsquigarrow$ står for kjegler, og $\dashrightarrow$ for piler i $\mathcal{C}$. Når grensene eksisterer finnes det naturlige isomorfismer:

$$
\begin{aligned}
\text{Kjegle}(F, d) = \text{Nat}(F, \Delta d) \cong \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\varinjlim F, d) \\
\text{Hom}_{\mathcal{C}}(c, \varprojlim F) \cong \text{Nat}(\Delta c, F) = \text{Kjegle}(c, F)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

'Kjegle' står for mengden av slike kjegler som eksisterer, og 'Nat' står for mengden av naturlige transformasjoner som eksisterer mellom de gitte funktorene.

Proposisjon 25
Dersom indekskategorien $\mathcal{J}$ har et initielt objekt a, vil $\varprojlim F = F(a)$.

Dette kommer av at for enhver kjegle σ fra c til F, må hver pil $\sigma_i\colon c \to F_i$ på grunn av kommutativiteten faktorisere gjennom den ene pilen fra F_a til F_i, og dette er akkurat definisjonen på en grense. Dualt vil $\varinjlim F$ være $F(b)$ om $\mathcal{J}$ har et finalt objekt b. Et godt eksempel på dette er det andre punktet i eksempel 24.

Akkurat som for kogrenser finnes det egne navn på spesielle typer av grenser. Dualbegrepet til koprodukt er produkt og dualbegrepet til pushouts er pullbacks.

11.2 Produkt

Produktet av objektene a og b i $\mathcal{C}$ er et nytt objekt $a \times b$ i $\mathcal{C}$ sammen med to piler $p\colon (a \times b) \to a$ og $q\colon (a \times b) \to b$ som kalles projeksjoner. For hvert par av funksjoner $f\colon c {\to} a$, $g\colon c {\to} b$ fra et tredje objekt c i $\mathcal{C}$ finnes det en unik h slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & b \end{tikzcd} \tag{13}$$

Tilordningen $<\!f, g\!>\mapsto h$ er en bijeksjon mellom hom-mengder:

$$C(c, a) \times C(c, a) \cong C(c, a \times b) \tag{14}$$

med invers $h \mapsto <\!ph, qh\!>$

Eksempel 26 (Produkt i Set)
I kategorien **Set** er produktet rett og slett det vanlige kartesiske produktet. Projeksjonene p og q er vanlige projeksjoner og h er gitt ved

$$h\colon c \ni x \mapsto <\!fx, gx\!> \in a \times b$$

11.3 Pullbacks

Gitt to piler $f\colon b {\to} a$ og $g\colon c {\to} a$ i $\mathcal{C}$ med et felles mål. Et pullback er en universell måte å fylle ut et kommutativt kvadrat på når disse sidene er gitt. Hjørnet i kvadratet skrives som produktet over a, $b \times_a c$. For ethvert annet kommutativt kvadrat, *ubac* , bygget på f og g skal det altså finnes en unik h slik at følgende diagram kommuterer:

$$\begin{tikzcd} u \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & b \times_a c \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"] & c \arrow[d, "g"] \\ & b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd}$$

Eksempel 27 (Pullback i Set)
I **Set** eksisterer alltid pullbacken av f og g. Den er gitt ved

$$b \times_a c = \{<\!x, y\!> \in b \times c \mid fx = gy\}$$

12 Adjungerte funktorer

Vi begynner dette kapittelet med et å bygge videre på eksempel 21. For en gitt kropp F har vi funktorene

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Set} \arrow[r, shift left, "V"] & \mathbf{Vect}_F \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

U er den glemsomme funktoren, og V tar hver mengde X til et vektorrom V_X med X som basis. Vi har sett at det for alle $X \in \mathbf{Set}$ og $W \in \mathbf{Vect}_F$ finnes en bijeksjon φ mellom hom-mengdene:

$$\varphi\colon \mathbf{Vect}_F(V_X, W)) \cong \mathbf{Set}(X, U(W))$$

Om $f\colon V_X \to W$ og $g\colon X \to U(W)$ er denne bijeksjonen gitt ved $(\varphi f)(x) = f(x)$ og $(\varphi^{-1} g)(\sum r_i x_i) = \sum r_i(g x_i)$. Et par av funktorer U, V som har egenskapen at det finnes en slik bijeksjon kalles for adjungerte. V er venstreadjungert til U, og U høyreadjungert til V. Begrepet minner noe om adjungerte operatorer mellom hilbertrom. Definisjonen er som følger:

Definisjon 28 (Adjungering)
La $\mathcal{X}$ og $\mathcal{A}$ være kategorier. En adjungering fra $\mathcal{X}$ til $\mathcal{A}$ er et trippel $<F, G, \varphi>\colon \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$, der F og G er funktorer:

$$\mathcal{X} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{A}$$

mens φ er en funksjon som tilordner hvert par av objekter $x \in \mathcal{X}$ og $a \in \mathcal{A}$ en bijeksjon mellom hom-mengdene:

$$\varphi_{x,a}\colon \mathcal{A}(Fx, a) \cong \mathcal{X}(x, Ga) \tag{15}$$

som er naturlig i a og x.

Vi kan se på begge sidene som bifunktorer. For hhv. venstre og høyre side har vi:

$$\mathcal{A}(F-,-)\colon \mathcal{X}^o \times \mathcal{A} \xrightarrow{F^o \times Id_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}^o \times \mathcal{A} \xrightarrow{hom} \mathbf{Set}$$
$$\mathcal{X}(-,G-)\colon \mathcal{X}^o \times \mathcal{A} \xrightarrow{Id_{\mathcal{X}} \times G} \mathcal{X}^o \times \mathcal{X} \xrightarrow{hom} \mathbf{Set}$$

At bijeksjonen er naturlig i x og a betyr at φ er en naturlig transformasjon mellom disse bifunktorene med $\varphi_{x,a}$ som komponenter. Det vil si at for alle $k\colon a \to a'$ og $h\colon x' \to x$ vil begge de følgende diagram kommutere:

$$\begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "k_*"] & X(x,Ga) \arrow[d, "(Gk)_*"] \\ A(Fx,a') \arrow[r, "\varphi_{x,a'}"] & X(x,Ga') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "(Fh)^*"] & X(x,Ga) \arrow[d, "h^*"] \\ A(Fx',a) \arrow[r, "\varphi_{x',a}"] & X(x',Ga) \end{tikzcd} \tag{16}$$

k_* betyr som vanlig komposisjon med k på venstresiden og h^* komposisjon med h på høyresiden.

Eksempel 29 (Adjungerte funktorer)

- I kategorien **Set** kan enhver funksjon $g\colon S\times T\to R$ av to variable betraktes som en funksjon $\varphi g\colon S\to \mathsf{hom}(T,R)$ av én variabel med en ny funksjon som resultat. φg er eksplisitt gitt ved $[(\varphi g)(s)](t) = g(s,t)$. Dette gir oss en bijeksjon

  $$\varphi\colon\ \mathsf{hom}(S\times T,R)\cong \mathsf{hom}(S,\mathsf{hom}(T,R))$$

  naturlig i S, T og R. Holder vi mengden T fast, ser vi at funktorene $F,G\colon \mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$ gitt ved $F(S)=S\times T$ og $G(R)=\mathsf{hom}(T,R)$ er adjungerte.

Vi skal nå se at en adjungering som den i definisjon 28 bestemmer en universell pil fra hvert element $x\in\mathcal{X}$ til G. La $a=Fx$ i (15). Da vil en av morfismene på venstre side være identiteten 1_{Fx}. Kall φ-bildet av denne for $\eta_x\colon x\to GFx$. η_x er sammen med Fx er universell pil. Dette ser vi ved å la $f'\colon Fx\to a$ være en pil i $\mathcal{A}$, og sende 1_{Fx} rundt begge veier i det kommutative diagrammet til venstre i (16):

$$\begin{tikzcd}
A(Fx,Fx) \arrow[r, "\varphi_{x,Fx}"] \arrow[d, "(f')_*"] & X(x,GFx) \arrow[d, "(Gf')_*"] \\
A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] & X(x,Ga)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \eta_x \arrow[d, mapsto] \\
f' \arrow[r, mapsto] & \varphi_{x,a}(f') = Gf'\circ\eta_x
\end{tikzcd}$$

Siden $\varphi_{x,a}$ er en bijeksjon betyr likheten nederst til høyre at hver pil $f\colon x\to Ga$ i $\mathcal{X}$ har formen $Gf'\circ\eta_x$ for en unik $f'\colon Fx\to a$ i $\mathcal{A}$. Dette er eksakt definisjonen på at η_x er en universell pil fra x til G.

Vi har også at η_x er komponentene i en naturlig transformasjon $\eta\colon I_X\dot{\to} GF$. Se [ML, Kap. IV,s.81] for et bevis på dette. η kalles enheten til adjungeringen.

Dualt gir adjungeringen en universell pil fra F til hvert objekt $a\in\mathcal{A}$. Sett $x=Ga$ i (15). Da vil høyre side innholde en identitsmorfisme 1_{Ga}. φ^{-1}-bildet av denne vil sammen med Ga være en universell pil fra F til a som kalles ε_a, og vi har at $\varphi^{-1}_{x,a}(g)=\varepsilon_a\circ Fg$. ε kalles koenheten til adjungeringen.

Vi oppsummerer det vi har kommet frem til i et teorem:

Teorem 30

En adjungering $<F,G,\varphi>\colon \mathcal{X}\rightharpoonup\mathcal{A}$ bestemmer:

(i) En naturlig transformasjon $\eta\colon I_{\mathcal{X}}\dot{\to} GF$, slik at for hver $x\in\mathcal{X}$ er η_x en universell pil fra x til G. Den høyreadjungerte funksjonen til $f\colon Fx\to a$ er

$$\varphi f = Gf\circ\eta_x\colon x\to GFx\to Ga$$

(ii) En naturlig transformasjon $\varepsilon\colon FG\dot{\to} I_{\mathcal{A}}$, slik at for hver $a\in\mathcal{A}$ er ε_a en universell pil fra F til a. Den venstreadjungerte til $g\colon x\to Ga$ er

$$\varphi^{-1}g=\epsilon_a\circ Fg\colon Fx\to FGa\to a$$

Eksempel 31
Den glemsomme funktoren $U\colon R\text{-}\mathbf{Mod}\to\mathbf{Ab}$ sender hver abelske gruppe til den samme gruppen, men glemmer skalarmultiplikasjonen. U har både en høyre og en vensteadjungert:

$$
\begin{tikzcd}
X \in R\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[r, "U"] & \mathbf{Ab} \ni A \arrow[l, bend right, "\mathsf{hom}(R,-)"'] \arrow[l, bend left, "R\otimes-"]
\end{tikzcd}
$$

- Venstre - $\varphi\colon\ R\text{-}\mathbf{Mod}(R\otimes A, X)\cong\mathbf{Ab}(A, UX)$
  Skalarmultiplikasjonen til R-modulen $R\otimes A$ er gitt ved $r(\sum r_i\otimes a_i) = \sum(rr_i)\otimes a_i$. Enheten og koenheten til adjungeringen er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
\eta_A \quad &: \quad A\ni a\mapsto 1\otimes a\in U(R\otimes A)\\
\varepsilon_X \quad &: \quad R\otimes UX\ni\sum r_i\otimes x_i\mapsto\sum r_i x_i\in X
\end{aligned}
$$

  Dette gir for $f\colon R\otimes A\to X$ og $g\colon A\to UX$ ved bruk av teorem 30:

$$
\begin{aligned}
(\varphi f) \quad &: \quad a\xmapsto{\eta_A}1\otimes a\xmapsto{Uf}f(1\otimes a)\\
(\varphi^{-1}g) \quad &: \quad \sum r_i\otimes a_i\xmapsto{R\otimes g}\sum r_i\otimes g(a_i)\xmapsto{\varepsilon_X}\sum r_i g(a_i)
\end{aligned}
$$

- Høyre - $\varphi\colon\ \mathbf{Ab}(UX, A)\cong R\text{-}\mathbf{Mod}(X,\mathsf{hom}(R,A))$
  Skalarmultiplikasjonen til R-modulen $\mathsf{hom}(R,A)$ er gitt ved $(rf)(r') = f(rr')$. Enheten og koenheten til denne adjungasjonen er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
\eta_X \quad &: \quad X\ni x\longmapsto(r\mapsto rx)\in\mathsf{hom}(R,UX)\\
\varepsilon_A \quad &: \quad U(\mathsf{hom}(R,A))\ni h\mapsto h(1)\in A
\end{aligned}
$$

  Dette gir for $f\colon UX\to A$ og $g\colon X\to\mathsf{hom}(R,A)$:

$$
\begin{aligned}
(\varphi f) \quad &: \quad x\xmapsto{\eta_X}(r\mapsto rx)\xmapsto{f_*}(r\mapsto f(rx))\\
(\varphi^{-1}g) \quad &: \quad x\xmapsto{Ug}gx\xmapsto{\varepsilon_A}(gx)(1)
\end{aligned}
$$

I begge tilfellene får vi at $\varphi^{-1}(\varphi f) = f$ og at $\varphi(\varphi^{-1}g) = g$, slik vi skal.

13 Mer om adjungerte

Begrepet adjungering er sannsynligvis kategoriteoriens mest fundamentale bidrag til matematikken, og det dukker opp overalt. Vi skal nå knytte begrepet adjungerte opp til tidligere begrep som grenser og ekvivalens mellom kategorier.

13.1 Grenser som adjungerte

Dersom vi nå går tilbake og ser på ligningene (8) og (14) oppdager vi at de kan skrives på følgende avslørende form:

$$C(a \amalg b, d) \cong \mathcal{C} \times \mathcal{C}(<a,b>, \Delta d)$$
$$\mathcal{C} \times \mathcal{C}(\Delta c, <a,b>) \cong C(c, a \times b)$$

Dette viser at funktoren som tar paret $<a,b>$ på dets koprodukt i $\mathcal{C}$ er den venstreadjungerte til diagonalfunktoren Δ, og funktoren som tar paret på produktet i $\mathcal{C}$ er den høyreadjungerte. Vi kan utrykke dette i figuren

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{C} \times \mathcal{C} \arrow[l, bend right, swap, "<a,b> \mapsto a \times c"] \arrow[l, bend left, "<a,b> \mapsto a \amalg c"] \end{tikzcd}$$

Disse funktorene er ikke alltid definert i alle kategorier $\mathcal{C}$, siden produktet og koproduktet ikke alltid eksisterer. Men der de er definert er de venstre og høyreadjungerte som på figuren.

Likedan gir ligning (12) at funktoren Kolim: $\mathcal{C}^{\mathcal{J}} \to \mathcal{C}$ som sender funktoren F til Kolim F ikke er noe annet enn den venstreadjungerte til diagonalfunktoren Δ i (9). Funktoren Lim er den høyreadjungerte.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \arrow[l, bend right, swap, "\mathrm{Lim}"] \arrow[l, bend left, "\mathrm{Kolim}"] \end{tikzcd}$$

13.2 Adjungerte og ekvivalens

Teorem 30 sier at en adjungering $<S,T,\varphi>: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$ gir oss en naturlig transformasjon $\eta: I_{\mathcal{C}} \dot{\to} TS$ og en naturlig transformasjon $\varepsilon: ST \dot{\to} I_{\mathcal{D}}$. Dersom begge disse transformasjonene er invertible, er kravene til at $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er ekvivalente kategorier tilfredstilt. Vi kaller en slik adjungering for en *adjungeringsekvivalens*.

Teorem 30 gir oss at dersom vi har funktorene S og T, kan vi beskrive φ og φ^{-1} ved hhv. enheten og koenheten til adjungeringen. Så vi kan skrive adjungeringen over som $<S,T,\eta,\varepsilon>$. Dette gir oss at i en adjungeringsekvivalens er T både høyre- og venstreadjungert til S. Den er nemlig venstreadjungert med enhet $\varepsilon^{-1}: I_{\mathcal{D}} \dot{\to} ST$ og koenhet $\eta^{-1}: TS \dot{\to} I_{\mathcal{C}}$.

Men dersom to kategorier er ekvivalente har vi jo gitt to passende naturlige isomorfier, og vi får teoremet:

Teorem 32
Dersom funktorene $S: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og $T: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ gir en ekvivalens mellom kategoriene $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$, finnes det en adjungeringsekvivalens $<S,T,\varphi>: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{D}$. S er da både den høyre- og venstreadjungerte til funktoren T

13.3 Bevaring av grenser

En av de nyttigste egenskapene til adjungerte funktorer er at en funktor som er en høyreadjungert vil bevare alle grenser (og dermed også produkt og pullbacks).

Teorem 33
Dersom funktoren $G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ har en venstreadjungert og funktoren $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ har en grensekjegle $\tau\colon a \dot\to T$ i $\mathcal{A}$, så vil funktoren GT ha grensekjeglen $G\tau\colon Ga \dot\to GT$ i $\mathcal{X}$.

Bevis: Egenskapene til en funktor gir at $G\tau$ virkelig er en kjegle fra objektet Ga i $\mathcal{X}$. Anta at σ er en annen kjegle til funktoren GT, $\sigma\colon x \dot\to GT$. Kall den venstreadjungerte funktoren til G for F og bruk adjungeringsisomorfien på σ. Dette gir piler $\sigma_i^\flat\colon Fx \to T_i$, som danner en kjegle $\sigma^\flat\colon Fx \dot\to T$ i $\mathcal{A}$. Siden a er grensen til funktoren T finnes den en unik $h\colon Fx \to a$ med $\tau_i \circ h = \sigma_i^\flat$ for hver i. Vi bruker så adjungersmorfien motsatt vei på denne likheten og får

$$\varphi(\tau_i \circ h) = G(\tau_i \circ h) \circ \eta_x = G\tau_i \circ (Gh \circ \eta_x) = G\tau_i \circ \varphi h = \varphi\sigma_i^\flat = \sigma_i$$

Likheten gjelder for alle i, og unikheten til pila φh utrykker da nøyaktig det at kjeglen $G\tau\colon Ga \dot\to GT$ er en grensekjegle.

Beviset kan illustreres med følgende diagrammer. $u\colon i \to j$ er en hvilken som helst pil i $\mathcal{J}$.

i $\mathcal{A}$:
$$\begin{tikzcd}
Ti \arrow[d, "Tu"'] & a = \mathrm{Lim}\ \mathrm{T} \arrow[l, "\tau_i"'] \arrow[dl, "\tau_j"] \\
Tj & Fx \arrow[l, "\sigma_j^\flat"] \arrow[u, dashed, "h"'] \arrow[ul, "\sigma_i^\flat"']
\end{tikzcd}$$

i $\mathcal{X}$:
$$\begin{tikzcd}
GTi \arrow[d, "GTu"'] & Ga \arrow[l, "G\tau_i"'] \arrow[dl, "G\tau_j"] \\
GTj & x \arrow[l, "\sigma_j"] \arrow[u, dashed, "\varphi h"'] \arrow[ul, "\sigma_i"']
\end{tikzcd}$$

Eksempel 34
Vi har sett flere eksempler på at glemsomme funktorer U er høyreadjungerte, og dette gjelder generelt. De bevarer dermed grenser. Vi vet at produktet i **Set** er det vanlige kartesiske produktet. Derfor kan vi umiddlerbart fastslå at produktet av to algebraiske strukturer (grupper, ringer osv.) har som underliggende mengde det kartesiske produktet av de to underliggende mengdene.

Det duale teoremet til teorem 33 gjelder selvfølgelig også: Enhver funktor F som har en høyreadjungert bevarer alle kogrenser.

Det passer også å ta med her at den kovariante hom-funktorer har egenskapen at den bevarer grenser.

Teorem 35
Hom-funktoren $\mathcal{C}(c, -)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ bevarer alle grenser i $\mathcal{C}$.

Beviset kan finnes i [ML, Kap.V, § 4]. Det er lettere å se hva dette egentlig betyr om vi skriver:

$$\mathcal{C}(c, \text{Lim } F) \cong \text{Lim } [\mathcal{C}(c, F-)] \tag{17}$$

Vi ser at vi kan 'trekke grensen utenfor' om den står på andre plass i en hom-mengde. Denne ligningen kan brukes til å definere grenser i kategorien $\mathcal{C}$ ved grenser i **Set**. F.eks. kan produktet av objektene a og b i $\mathcal{C}$ indirekte defineres ved

$$\mathcal{C}(c, a \times b) \cong \mathcal{C}(c, a) \times \mathcal{C}(c, b)$$

Når det gjelder den kontravariante hom-funktoren vil den ta kogrenser (og kogrensekjegler) i $\mathcal{C}$ til grenser (og grensekjegler) i **Set**. Det ser vi ved å bruke (17) slik:

$$\mathcal{C}(\text{Kolim } F, c) = \mathcal{C}^o(c, \text{Lim } F) \cong \text{Lim } [\mathcal{C}^o(c, F-)] = \text{Lim } [\mathcal{C}(F-, c)] \tag{18}$$

14 Kategorien $\mathbf{\Delta}$ og simplisielle objekter

Kategorien $\mathbf{\Delta}$, som er definert er i kapittel 5.2, er en svært viktig kategori. På en måte vi skal gjøre klarere etter hvert kan vi si at denne kategorien styrer alle kategorier.

Vi husker at objektene i $\mathbf{\Delta}$ skrives $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$, mens pilene er ordningsbevarende funksjoner. Altså må $\varphi(i) \leq \varphi(j)$ dersom $i < j$. To typer morfismer i $\mathbf{\Delta}$ er spesielt viktige. Nemlig de følgende:

$$\delta_i^n \colon [n-1] \to [n] \qquad \delta_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{om } j < i \\ j+1 & \text{om } j \geq i \end{cases} \qquad , 0 \leq i \leq n$$

$$\sigma_i^n \colon [n] \to [n-1] \qquad \sigma_i^n(j) = \begin{cases} j & \text{om } j \leq i \\ j-1 & \text{om } j > i \end{cases} \qquad , 0 \leq i < n$$

Vi ser at δ_i^n er én-til-én og hopper over element i i $[n]$, mens σ_i^n er på og sender både i og $i+1$ i $[n]$ på i. Veldig ofte dropper vi superscriptet n. Grunnen til at disse funksjonene er spesielt viktige er det følgende teoremet:

Teorem 36
For enhver morfisme $\varphi \colon [n] \to [m]$ i $\mathbf{\Delta}$ finnes det en unik dekomposisjon

$$\varphi = \delta_{i_1} \delta_{i_2} \ldots \delta_{i_k} \sigma_{j_1} \sigma_{j_2} \ldots \sigma_{j_l} \tag{19}$$

med $i_1 > i_2 > \cdots > i_k$ og $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$, der $m = n + k - l$.

Bevis finnes i [ML, Kap.VII, § 6]. i'ene er de elementene i $[m]$ som ikke blir truffet av φ, mens j'ene er de elementene i $[n]$ som er slik at $\varphi(j) = \varphi(j+1)$. For at komposisjonen av to morfismer skal komme på formen (19) trenger vi tre identiteter for binære komposisjoner:

$$\begin{aligned}
\delta_i\delta_j &= \delta_{j+1}\delta_i \quad \text{for } i \leq j \\
\sigma_j\sigma_i &= \sigma_i\sigma_{j+1} \quad \text{for } i \leq j \\
\sigma_j\delta_i &= \begin{cases} \delta_i\sigma_{j-1} & \text{for } i < j \\ 1 & \text{for } i = j,\ i = j+1 \\ \delta_{i-1}\sigma_j & \text{for } i > j+1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{20}$$

Identitetene lar seg lett verifisere. Vi sier at pilene δ_i^n og σ_i^n underlagt relasjonene i (20) genererer kategorien $\mathbf{\Delta}$. δ_i kalles randavbildninger, og σ_i kalles degenerasjonsavbildninger. Vi kan illustrere $\mathbf{\Delta}$ slik:

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left=2, "\delta_1"] \arrow[r, shift right=2, "\delta_0"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma_0" description] \arrow[r, bend left, "\delta_0"] \arrow[r, "\delta_1" description] \arrow[r, bend right, "\delta_2"'] & {[2]} \arrow[l, shift right=2, "\sigma_0"'] \arrow[l, shift left=2, "\sigma_1"] \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & {[3]} \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

Funktorer fra $\mathbf{\Delta}$ til andre kategorier kalles simplisielle objekter.

Definisjon 37 (Simplisielt objekt)
Et *simplisielt $\mathcal{C}$-objekt* er en funktor $F\colon \mathbf{\Delta}^o \to \mathcal{C}$. Et kosimplisielt $\mathcal{C}$-objekt er en funktor $G\colon \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$

Særlig viktig er avbildningene av δ_i^n og σ_i^n, siden egenskapene til en funktor sammen med teorem 36 gir at avbildningen av enhver annen pil i $\mathbf{\Delta}$ kan dekomponeres i slike. Det er vanlig, med F et simplisielt og G en kosimpliselt objekt, å definere:

$$\begin{aligned}
F(\delta_i) &= \delta_i^* = d_i \qquad & G(\delta_i) &= (\delta_i)_* = d^i \\
F(\sigma_i) &= \sigma_i^* = s_i \qquad & G(\sigma_i) &= (\sigma_i)_* = s^i
\end{aligned}$$

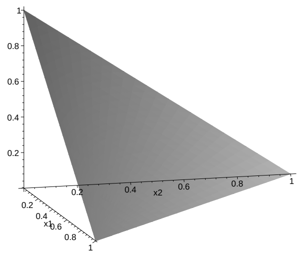
Et simplisielt $\mathcal{C}$-objekt er altså gitt ved å gi en mengde av objekter $\{F_n = F([n])\}_{n\geq 0}$ i $\mathcal{C}$, samt morfismer $d_i\colon F_{n-1} \to F_n$ og $s_i\colon F_n \to F_{n-1}$, som må tilfrestille

$$\begin{aligned}
d_id_j &= d_{j+1}d_i \quad \text{for } i \leq j \\
s_js_i &= s_is_{j+1} \quad \text{for } i \leq j \\
s_jd_i &= \begin{cases} d_is_{j-1} & \text{for } i < j \\ 1 & \text{for } i = j,\ i = j+1 \\ d_{i-1}s_j & \text{for } i > j+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Eksempel 38
Kategorien $\mathbf{\Delta}$ kan gis en geometrisk tolkning ved det kosimplisielle objektet

$$\begin{array}{rcl} \Delta\colon \mathbf{\Delta} & \to & \mathbf{Top} \\ [n] & \mapsto & \Delta^{\mathsf{n}} = \{<x_0, x_1, \ldots, x_n> \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}} \mid \sum x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i\} \end{array}$$

Δ^{n} er det standard topologiske n-simplekset, og er en delmengde av $\mathbb{R}^{n+1}$. Δ^{n} er av dimensjon n og er avgrenset av $n+1$ kopier av $\Delta^{\mathsf{n-1}}$.



Figur 1: Δ^2

Δ^{n} har $n+1$ hjørner, som vi kan nummerere ved at hjørne i har $x_i = 1$ og dermed $x_j = 0, j \neq i$. Korandavbildningene d^i er gitt ved $d^i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_n)$. Dette har en enkel geometrisk tolkning, nemlig at Δ^{n} sendes på den av flatene som avgrenser $\Delta^{\mathsf{n+1}}$ som ikke inneholder hjørne i. Kodegenerasjonsavbildningene er gitt ved $s^i(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Geometrisk sett kollapses $\Delta^{\mathsf{n+1}}$ ved at det projiseres på Δ^{n} ved at hjørne i og $i+1$ identifiseres.

Ut ifra eksemplet ser vi at navnene rand- og degenerasjonsavbildninger er passende.

Funktorer $X\colon \mathbf{\Delta^{o}} \to \mathbf{Set}$ kalles simplisielle mengder. Funktorkategorien av alle simplisielle mengder benevnes $\mathcal{S}$.

15 Nerven til en kategori

Vi skal i dette kapittelet se at en kategori ikke er annet enn en simplisiell mengde som tilfredstiller visse krav. Vi skal begynne med å definere nerven til en kategori.

15.1 Definisjon og Nerveteoremet

Definisjon 39 (Nerven)
La N være en funktor fra kategorien av små kategorier til funktorkategorien av simplisielle mengder.

$$N\colon \mathbf{Cat} \to \mathcal{S}$$

$N\mathcal{C}$ er en simplisiell mengde kalt *nerven* til kategorien $\mathcal{C}$. Den er gitt på objekter ved

$$[q] \mapsto N_q\mathcal{C} = [\mathbf{[q]}, \mathcal{C}]$$

der $[\mathbf{[q]}, \mathcal{C}]$ betegner mengden av alle funktorer fra kategorien $\mathbf{[q]}$ til $\mathcal{C}$. $N\mathcal{C}$ er gitt på en morfisme $\varphi\colon [p] \to [q]$ i $\mathcal{C}$ ved

$$N\mathcal{C}(\varphi) = \varphi^*\colon N_q\mathcal{C} \ni F \mapsto F \circ \varphi \in N_p\mathcal{C}$$

Kategorien $\mathbf{[q]}$ er definert i kap 5.2, og består av $q+1$ objekter, som er ordnet ved at hvert objekt har en pil til det etter. Vi ser at $N_0\mathcal{C}$ er mengden av objektene i $\mathcal{C}$, $N_1\mathcal{C}$ er mengden av pilene i $\mathcal{C}$ og $N_2\mathcal{C}$ er mengden av sammensettbare piler i $\mathcal{C}$. Generelt kan vi skrive $N_q\mathcal{C}$ som en disjunkt union

$$N_q\mathcal{C} = \coprod_{(c_0,\dots,c_q)\in \mathrm{Obj}\mathcal{C}} \mathcal{C}(c_0, c_1) \times \mathcal{C}(c_1, c_2) \times \cdots \times \mathcal{C}(c_{q-1}, c_q)$$

Der $c_0, \dots, c_q$ ikke nødvendigvis er distinkte objekter. $N_q\mathcal{C}$ er altså alle n-tupler av sammensettbare piler i $\mathcal{C}$. Et slikt n-tuppel ser slik ut:

$$c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} c_2 \cdots\cdots c_{q-1} \xrightarrow{f_q} c_q$$

For pilene d_i og s_i i **Set** har vi

$$\begin{aligned}
&d_i\colon N_q\mathcal{C} \to N_{q-1}\mathcal{C}\\
&d_0\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <f_2, \dots, f_q>\\
&d_j\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <f_1, \dots, f_{j+1}f_j, \dots f_q> \quad 1 \leq j \leq q-1\\
&d_q\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <f_1, \dots, f_{q-1}>\\
\\
&s_i\colon N_q\mathcal{C} \to N_{q+1}\mathcal{C}\\
&s_0\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <1_{c_0}, f_1, \dots, f_q>\\
&s_j\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <f_1, \dots, f_{j-1}, 1_{c_j}, f_j, \dots f_q> \quad 1 \leq j \leq q-1\\
&s_q\colon <f_1, \dots, f_q> \mapsto <f_1, \dots, f_q, 1_{c_q}>
\end{aligned} \tag{21}$$

Pilen d_i fjerner punkt c_i og fjerner dermed den første eller siste pilen, eller komponerer to piler. Pilene s_i setter inn en identitetsavbildning 1_{c_i} på riktig sted.

Vi har nå en forståelse av hvordan nerven til en kategori ser ut, og presenterer teoremet som står sentralt i dette kapittelet. Etter litt mer arbeid skal vi også bevise det.

Teorem 40 (Nerveteoremet)
La N være funktoren fra definisjon 39.

- For enhver kategori $\mathcal{C}$ sender nerven $N\mathcal{C}$ enhver pushout bygd på to injektive funksjoner i $\mathbf{\Delta}$ til en pullback i $\mathbf{Set}$.
- Dersom $X \in \mathcal{S}$ tar alle pushouts bygd på to injektive funksjoner på pullbacks, så eksisterer en unik kategori $\mathcal{C}_X$, avhengig av X, med $X \cong N\mathcal{C}_X$.

15.2 Pushouts i $\mathbf{\Delta}$

Nå er det imidlertid ikke slik at alle pushouts i $\mathbf{\Delta}$ eksisterer, og det er ikke uten videre lett å avgjøre hvilke som gjør det. Vi vil derfor utforske en alternativ måte å kode objekter og piler i $\mathbf{\Delta}$ på. La oss, for å ha noe å jobbe med, sette følgende navn på delene i et vilkårlig pushout i $\mathbf{\Delta}$:

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & {[n_1]} \arrow[d, dotted, "\widehat{\psi}"] \\ {[n_2]} \arrow[r, dotted, "\widehat{\varphi}"'] & {[n_{12}]} \end{tikzcd} \qquad [n_{12}] = [n_1] \amalg_{[m]} [n_2] \tag{22}$$

φ og ψ trenger foreløpig ikke å være injektive. For å se hva som kan gå galt når vi skal konstruere en pushout ser vi på de følgende to diagram:

$$\text{(i)}: \quad \begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\delta_1"'] & {[1]} \arrow[d, dotted, "\delta_2"] \\ {[1]} \arrow[r, dotted, "\delta_0"'] & {[2]} \end{tikzcd} \qquad \text{(ii)}: \quad \begin{tikzcd} {[0]} \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, "\delta_1"'] & {[1]} \\ {[1]} & ? \end{tikzcd}$$

Figur 1 i vedlegg A viser diagrammene skrevet ut med elementer. Det er lettere å se hva som egentlig skjer på denne figuren. Diagrammet (i) har en pushout, som tegnet inn på figuren, mens for (ii) eksisterer det ingen pushout. Dette kommer av at om vi her skal konstruere avbildninger fra $[n_1]$ og $[n_2]$ til $[n_{12}]$ må vi bestemme en ordning av elementet 1 i $[n_1]$ og elementet 1 i $[n_2]$. Dette fører til at diagrammet ikke kan bli universelt. I (i) trenger vi derimot ikke å ta noe valg selv - pilene $\widehat{\varphi}$ og $\widehat{\psi}$ er her unikt bestemt av kravene om kommutativitet og injektivitet.

Vi kan observere at et objekt $[m]$ i $\mathbf{\Delta}$ kan skrives som forskjellige pushouts over $[0]$:

$$[m] = [m-k] \amalg_{[0]} [k] \quad 0 \le k \le m, \qquad \begin{array}{l} \varphi = \delta_{m-k-1} \cdots \delta_0 \\ \psi = \delta_k \cdots \delta_1 \end{array} \tag{23}$$

Se figur 2 i vedlegg A. Intutivt sett kan vi si at pushouten limer sammen det siste elementet i $[m-k]$ og det første i $[k]$. Ved å bruke formelen iterativt med $k = 1$ får vi at vi kan skrive

$$[m] = [0] \amalg_{[0]} \underbrace{[1] \amalg_{[0]} \ldots \amalg_{[0]} [1]}_{m\text{antall } [1]} \amalg_{[0]} [0] \tag{24}$$

Her identifiserer vi det siste elementet i hver [1] med det første i neste [1]. Vi kan da tolke det slik at elementene i $[m]$ representeres av tegnet $\amalg_{[0]}$. Fordelen med denne skrivemåten er at en funksjon $\varphi\colon [m]\to[n]$ er entydig gitt ved å angi hva den er på hvert av leddene.

Proposisjon 41
La $\varphi\colon [m]\to[n]$ være en pil i $\mathbf{\Delta}$, og skriv $[m]$ som i (24). φ kan splittes opp i $m+2$ delfunksjoner $\varphi_i, 0 \leq i \leq m+1$. Hver delfunksjon har enten [0] (endefunksjonene) eller [1] (indrefunksjonene) som domene, og er unikt gitt ved et heltall Φ_i, slik at

$$[m] \mapsto [\Phi_0] \amalg_{[0]} [\Phi_1] \amalg_{[0]} \ldots \amalg_{[0]} [\Phi_m] \amalg_{[0]} [\Phi_{m+1}] \quad , \quad \sum \Phi_i = n$$

Vi har tre muligheter for hver av delfunksjonene:
For indrefunksjonene:

- φ_i er en *ekspansjon* om $\Phi_i > 1$. Da er $\varphi_i\colon [1]\to [\Phi_i]$ gitt ved $\delta_{\varphi_i-1}\ldots\delta_1$.
- φ_i er en *identitet* om $\Phi_i = 1$.
- φ_i er en *kollaps* om $\Phi_i = 0$. Da er φ_i gitt ved σ_0.

For endefunksjonene:

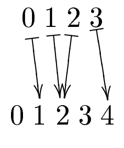
- φ_i er en *ekspansjon* om $\Phi_i > 0$. Da er $\varphi_0\colon [0]\to [\Phi_0]$ gitt ved $\delta_{\Phi_0-1}\ldots\delta_0$, og $\varphi_{m+1}\colon [0]\to [\Phi_{m+1}]$ gitt ved $\delta_{\Phi_{m+1}}\ldots\delta_1$.
- φ_i er en *identitet* om $\Phi_i = 0$.

I alle tilfellene er delfunksjonene definert slik at de stemmer overens i sammenlimingen.

For å se hvordan denne måten å kode en funksjon på henger sammen med den gamle ser vi på et eksempel. For at sammenhengen skal bli klarere tar vi med et diagram der vi skriver ut hva hvert objekt går på.

Eksempel 42
Tre måter å skrive en gitt funksjon ψ i $\mathbf{\Delta}$ på.

$$\begin{tikzcd} {[3]} \arrow[d, "\delta_3\delta_0\sigma_1"] \\ {[4]} \end{tikzcd}$$



$$\begin{tikzcd} {[0] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [0]} \arrow[d, "\psi"] \\ {[1] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [0] \amalg_{[0]} [2] \amalg_{[0]} [0]} \end{tikzcd}$$

Vi ser at ψ er gitt ved tallene (1,1,0,2,0), og består fra venstre av en ekspansjon, en identitet, en kollaps, en ekspansjon og en identitet. Legg merke til at tallene Ψ_i beskriver hvor stort «åpenrom» det er mellom bildene av hvert par av elementer i [3].

Omtrent som vi nå har dekomponert en funksjon i $m+2$ deler kan vi dekomponere en hel pushout. Dette er en stor fordel med den nye måten å skrive en funksjon på - regelen for konstruksjon og eksistens av pushouts blir veldig enkel. Regelen for eksistens blir at det ikke finnes noen pushout om de to funksjonene vi vil bygge den på har en ekspansjon på samme sted. Det er nemlig akkurat i slike tilfeller vi må velge en ordning selv, slik vi så i vårt innledende eksempel.

Teorem 43
En pushout i $\mathbf{\Delta}$ eksisterer om funksjonene φ og ψ i

$$\begin{tikzcd}
{[m]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & {[n_1]} \arrow[d, dotted, "\widehat{\psi}"] \\
{[n_2]} \arrow[r, dotted, "\widehat{\varphi}"'] & {[n_{12}]}
\end{tikzcd}$$

er slik at maksimalt én av φ_i og ψ_i er en ekspansjon for hver i.

Dersom dette er tilfellet, kan funksjonene $\widehat{\varphi}$ og $\widehat{\psi}$ konstrueres slik:

- Om φ_i er en ekspansjon og ψ_i en identitet, blir $\widehat{\varphi}_i = \varphi_i$ og $\widehat{\psi}_i$ en identitet $[\Phi_i] \rightarrow [\Phi_i]$. Motsatt, om ψ_i er en ekspansjon og φ_i en identitet, blir $\widehat{\psi}_i = \psi_i$ og $\widehat{\varphi}_i$ en identitet $[\Psi_i] \rightarrow [\Psi_i]$.
- Om φ_i eller ψ_i er en kollaps, blir $\widehat{\Phi}_i = \widehat{\Psi}_i = 0$.
- Om φ_i og ψ_i begge er identiteter, blir også $\widehat{\varphi}_i$ og $\widehat{\psi}_i$ identiteter.

Vi ser altså at vi konstruerer pushouten som en iterert pushout av trivielle delpushouter. Vi ser utifra teormet at det finnes fire slike trivielle pushouter - se venstre side i ligningene (26) til (29) for diagrammer. Alle pushouts må være bygd opp av disse. Vi tar nå for oss et eksempel der vi dekomponerer en pushout som i utgangspunktet ser ganske uhåndgripelig ut.

Eksempel 44 (Dekomponering av pushouts)
Til venste under er en pushout i $\mathbf{\Delta}$. I figur 3 i vedlegg A er den skrevet ut med elementer. Til høyre under har vi skrevet objektene som itererte pushouts.

$$\begin{tikzcd}
{[2]} \arrow[r, "\delta_1\sigma_0"] \arrow[d, "\delta_4\delta_1"] & {[2]} \arrow[d, "\delta_3"] \\
{[4]} \arrow[r, "\delta_1\sigma_0\sigma_1"] & {[3]}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[0] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [0]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & {[0] \amalg_{[0]} [0] \amalg_{[0]} [2] \amalg_{[0]} [0]} \arrow[d, "\widehat{\psi}"'] \\
{[0] \amalg_{[0]} [2] \amalg_{[0]} [1] \amalg_{[0]} [1]} \arrow[r, "\widehat{\varphi}"'] & {[0] \amalg_{[0]} [0] \amalg_{[0]} [2] \amalg_{[0]} [1]}
\end{tikzcd}$$

Vi trekker nå ut $\amalg_{[0]}$ og får de fire komponentene i pushouten.

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & {[0]} \arrow[d, equal] & \amalg_{[0]} & {[1]} \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\delta_1"] & {[0]} \arrow[d, equal] & \amalg_{[0]} & {[1]} \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, equal] & {[2]} \arrow[d, equal] & \amalg_{[0]} & {[0]} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\delta_1"] & {[0]} \arrow[d, "\delta_1"] \\
{[0]} \arrow[r, equal] & {[0]} & & {[2]} \arrow[r, "\sigma_0\sigma_1"] & {[0]} & & {[1]} \arrow[r, "\delta_1"] & {[2]} & & {[1]} \arrow[r, equal] & {[1]}
\end{tikzcd} \tag{25}$$

15.3 Bevis av Nerveteoremet

Bevis på første del av teorem 40 . Vi har sett at en pushout i $\mathbf{\Delta}$ kan skrives som en iterert pushout av pushouter. Hvis vi for det første kan vise at ethvert objekt $N_q\mathcal{C}$ i **Set** kan skrives som et iterert pullback på tilsvarende måte som i (24), og for det andre at hvert av de trivielle pushoutene fra teorem 43 går på et pullback, er vi i mål.

Vi husker fra eksempel 27 at et pullback i **Set** alltid eksisterer. Pullbacket på pilene $f\colon b \to a$ og $g\colon c \to a$ består av alle par $<x, y> \in b \times c$ med $fx = gy$. Vi kommer til å bruke dette resultatet videre for å vise at et gitt diagram er et pushbackdiagram.

La nå b være alle k-tupler av sammensettbare piler i $\mathcal{C}$, og la c være alle $(m\text{-}k)$-tupler. La f være funksjonen $d_1 \dots d_k$, som tar hvert k-tuppel på kilden til den første pila, og la g være funksjonen $d_0 \dots d_{m-k-1}$, som tar hvert $(m-k)$-tuppel på målet til den siste pila. Pushouten blir da nettopp alle m-tupler av sammensettbare piler. Eller i diagramform:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Obj} \mathcal{C} & N_{m-k}\mathcal{C} \arrow[l, "d_0 \dots d_{m-k-1}"'] & & c_k & {<f_1, \dots, f_k>} \arrow[l, mapsto] \\
N_k\mathcal{C} \arrow[u, "d_1 \dots d_k"] & N_m\mathcal{C} \arrow[l, dotted, "d_0 \dots d_{k-1}"] \arrow[u, dotted, "d_{k+1} \dots d_m"'] & & {<f_{k+1}, \dots, f_m>} \arrow[u, mapsto] & {<f_1, \dots, f_m>} \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Dette er nøyaktig (23) etter at vi har brukt $N\mathcal{C}$ på begge sider, og vi kan slutte at $N_q\mathcal{C}$ kan skrives som i (24):

$$N_q\mathcal{C} = N_0\mathcal{C} \times_{N_0\mathcal{C}} N_1\mathcal{C} \times_{N_0\mathcal{C}} \dots \times_{N_0\mathcal{C}} N_1\mathcal{C} \times_{N_0\mathcal{C}} N_0\mathcal{C}$$

slik vi ønsket. Pullbacken $N_1\mathcal{C} \times_{N_0\mathcal{C}} N_1\mathcal{C}$ limer her sammen to piler ved å identifisere målet til den første med kilden til den andre.

La oss nå se på hva de trivielle pushoutene fra teorem 43 går på når vi bruker $N\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
{[q]} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & {[q]} \arrow[d, equal] & & N_q\mathcal{C} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & N_q\mathcal{C} \arrow[d, equal] \\
{[q]} \arrow[r, equal] & {[q]} & \mapsto & N_q\mathcal{C} \arrow[r, equal] & N_q\mathcal{C}
\end{tikzcd} \qquad q = 0, 1 \tag{26}$$

Høyre side er innlysende en pullback.

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, "\delta_n \ldots \delta_1"] \arrow[d, equal] & {[n]} \arrow[d, equal] & \mapsto & \mathrm{Obj}\ \mathcal{C} \arrow[d, equal] & \{<f_1, \ldots, f_n>\} \arrow[l, "d_1 \ldots d_n"'] \arrow[d, equal] \\
{[0]} \arrow[r, "\delta_n \ldots \delta_1"] & {[n]} & & \mathrm{Obj}\ \mathcal{C} & \{<f_1, \ldots, f_n>\} \arrow[l, "d_1 \ldots d_n"']
\end{tikzcd}
\qquad n \geq 1 \qquad (27)
$$

Her er det også innlysende at høyre side er en pullback. Pullback-elementet skal nemlig være alle par bestående av et n-tuppel av sammensettbare piler og et objekt som er kilden til den første pila. Dette blir ikke annet enn n-tuppelet.

$$
\begin{tikzcd}
{[1]} \arrow[r, "\delta_{n-1} \ldots \delta_1"] \arrow[d, equal] & {[n]} \arrow[d, equal] & \mapsto & \mathrm{Morf}\ \mathcal{C} \arrow[d, equal] & \{<f_1, \ldots, f_n>\} \arrow[l, "d_1 \ldots d_{n-1}"'] \arrow[d, equal] \\
{[1]} \arrow[r, "\delta_{n-1} \ldots \delta_1"] & {[n]} & & \mathrm{Morf}\ \mathcal{C} & \{<f_1, \ldots, f_n>\} \arrow[l, "d_1 \ldots d_{n-1}"']
\end{tikzcd}
\qquad n \geq 2 \qquad (28)
$$

Igjen er det greit å se at vi får et pullback. Pullback-elementet skal være alle par bestående av en pil f og et n-tuppel som komposisjonen av skal bli f. Dette blir igjen ikke annet enn n-tuppelet.

$$
\begin{tikzcd}
{[1]} \arrow[r, "\delta_{n-1} \ldots \delta_1"] \arrow[d, "\sigma_0"] & {[n]} \arrow[d, "\sigma_0 \ldots \sigma_{n-1}"] & \mapsto & \mathrm{Morf}\ \mathcal{C} & \{<f_1, \ldots, f_n>\} \arrow[l, "d_1 \ldots d_{n-1}"'] \\
{[0]} \arrow[r, equal] & {[0]} & & \mathrm{Obj}\ \mathcal{C} \arrow[u, "s_0"] \arrow[r, equal] & \mathrm{Obj}\ \mathcal{C} \arrow[u, "s_{n-1} \ldots s_0"']
\end{tikzcd}
\qquad n \geq 0 \qquad (29)
$$

Her får vi for $n > 1$ generelt ikke en pullback på høyre side. La oss se på tilfellet n=2. Pullbackobjektet skal da bli alle par bestående av et objekt c og et par av sammensettbare piler med komposisjon lik Id_c. Denne mengden er imidlertid ikke kun bestemt av objektet c, siden også andre par $<f, g>$ av sammensettbare piler i $\mathcal{C}$ enn $<\mathrm{Id}_c, \mathrm{Id}_c>$ kan gi $g \circ f = \mathrm{Id}_c$.

Pushouten på venste side i (29) opptrer imidlertid kun om φ eller ψ inneholder en kollaps, og det gjor de kun om en av dem ikke er injektiv. Det er derfor vi må ha klausulen om injektive funksjoner i teorem 40.

Vi ser at alle de tre trivielle pushoutene som oppstår om φ og ψ er injektive funksjoner taes på pullbacks i **Set**. Første del av teoremet er dermed bevist.

Bevis på andre del av teoremet. Vi har nå gitt en simplisiell mengde X som tar alle pushouts som ikke inneholder kollapser på pullbacks i **Set**. Vi kan tegne bildet av X i **Set** slik:

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "s_0"] & X_1 \arrow[l, shift right=2, "d_0"'] \arrow[l, shift left=2, "d_1"] \arrow[r, shift left=1, "s_1"] \arrow[r, shift right=1, "s_0"'] & X_2 \arrow[l, shift right=3, "d_2"'] \arrow[l, "d_1"] \arrow[l, shift left=3, "d_0"] & X_3 \arrow[l, shift right=2] \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=4] \arrow[l, shift left=4] \arrow[l, shift right=1] \arrow[l, shift left=1] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}
$$

Ut ifra det vi har sett om hvordan nerven fungerer virker det nå naturlig å definere:

$$\begin{aligned} \mathrm{Obj}\,\mathcal{C} &= X_0 \\ \mathrm{Morf}\,\mathcal{C} &= X_1 \end{aligned}$$

og videre:

$$\begin{aligned} s_0(c) = &\quad \mathrm{Id}_c \\ d_0(f\colon a \to b) = &\quad b \\ d_1(f\colon a \to b) = &\quad a \end{aligned}$$

s_0 gir altså hvert objekt i X_0 en identitetspil, mens d_0 og d_1 gir hver pil i X_1 hhv. et mål og en kilde. Videre trenger kategorien $\mathcal{C}$ også en komposisjonsfunksjon. X_n blir mengden av alle n-tupler av sammensettbare piler i kategorien. For siden funktoren X er en simplisiell mengde har vi gitt en kanonisk avbildning:

$$X_n \cong X_1 \times_{X_0} X_{n-1} \cong X_1 \times_{X_0} \cdots \times_{X_0} X_1$$

Grunnen til at denne er en isomorfi er ekstrabetingelsen på X om at den skal ta pushouts på pullbacks. Isomorfien er definert ved:

$$x \mapsto \langle d_2 \cdots d_n x\ ,\ d_0 d_3 \cdots d_n x\ ,\ \ldots\ ,\ d_0 \cdots d_{n-3} d_n x\ ,\ d_0 \cdots d_{n-2} x \rangle \tag{30}$$

For X_2 får vi

$$X_2 \cong X_1 \times_{X_0} X_1 \quad \text{med} \quad x \mapsto \langle d_2 x, d_0 x \rangle$$

Dette gir oss at komposisjonsmorfismen i kategorien $\mathcal{C}$ er:

$$g \circ f = d_1(f, g)$$

Funksjonene s_i vil gjøre det samme som for nerven, nemlig å sette inn identitetspiler på riktig sted. For å bevise at $\mathcal{C}$ som definert over da er en kategori må vi dessuten vise at

- Komposisjonen respekterer enheter. Det vil si at $d_1 s_0 = d_1 s_1 = \mathrm{Id}\colon X_1 \to X_1$. Altså, om vi setter inn en enhet før eller etter en pil og tar komposisjon får vi tilbake den samme pila. Egenskapene til en funktor gir oss at dette holder om det tilsvarende diagrammet i $\mathbf{\Delta}$ kommuterer, og det er trivielt å sjekke. Altså, diagrammet til venste under er kommutativt, og dermed er også det til høyre kommutativt.

$$\begin{tikzcd}
{[2]} \arrow[r, "\sigma_1"] & {[1]} \arrow[d, equal] & {[2]} \arrow[l, "\sigma_0"'] & & X_2 \arrow[dr, "d_1"'] & X_1 \arrow[l, "s_1"'] \arrow[r, "s_0"] \arrow[d, equal] & X_2 \arrow[dl, "d_1"] \\
& {[1]} \arrow[ul, "\delta_1"] \arrow[ur, "\delta_1"'] & & \mapsto & & X_1 &
\end{tikzcd}$$

- Komposisjonen er assosiativ. Det vil si at $d_1 d_1 = d_1 d_2 \colon X_3 \to X_1$. Igjen er det trivielt å sjekke at det tilsvarende diagrammet i $\mathbf{\Delta}$ kommuterer.

$$\begin{tikzcd}
{[3]} & {[2]} \arrow[l, "\delta_2"'] \\
{[2]} \arrow[u, "\delta_1"] & {[1]} \arrow[l, "\delta_1"] \arrow[u, "\delta_1"']
\end{tikzcd}
\quad \mapsto \quad
\begin{tikzcd}
X_3 \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "d_1"'] & X_2 \arrow[d, "d_1"] \\
X_2 \arrow[r, "d_1"'] & X_1
\end{tikzcd}$$

Vi har nå ut ifra den simplisielle mengden X konstruert en kategori $\mathcal{C}_X$, og vist at $X_q \cong N_q\mathcal{C}_X$ ved isomorien gitt i (30). Andre del av Nerveteoremet er dermed bevist.

15.4 Mer om nerven

Det Nerveteoremet egentlig sier er at kategorien **Cat** av små kategorier er en underkategori av kategorien $\mathcal{S}$ av simplisielle mengder.

$$\mathbf{Cat} \subset \mathcal{S}$$

Inklusjonen er gitt ved funktoren N i definisjon 39. N er én-til-én, og bildet til funktoren er alle simplisielle mengder som tar pushouter bygt på injektive funksjoner på pullbacks i **Set**. Simplisielle mengder er altså mer generelle enn kategorier.

Vi skal avslutte med å vise at nervefunktoren N bevarer grenser, men generelt ikke kogrenser. [1]

Vi viser først at N bevarer grenser som finnes i **Cat**. La $F\colon \mathcal{J} \to \mathbf{Cat}$ være en funktor fra en indekskategori $\mathcal{J}$, og anta at denne har en grense $\mathrm{Lim}\ F \in \mathbf{Cat}$. Vi ønsker å vise at

$$N(\mathrm{Lim} F) = \mathrm{Lim}(N \circ F)\colon \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Set}$$

Vi har at $N(\mathrm{Lim}F)$ er definert på objekter ved

$$[q] \mapsto N_q \mathrm{Lim}F = [\mathbf{[q]}, \mathrm{Lim}F] = \mathbf{Cat}(\mathbf{[q]}, \mathrm{Lim}F) \cong \mathrm{Kjegle}(\mathbf{[q]}, F)$$

Den siste isomorfien får vi fra ligning (12).

Grensen til en samling funktorer er gitt ved at vi tar grensen av hvert ledd. Altså, la F være en funktor $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. Lim F er da gitt ved at hvert objekt $c \in \mathcal{C}$ går på grensen til funktoren $\mathcal{J} \to \mathcal{D}$ som er gitt ved at

$$i \mapsto (Fi)(c) \quad (f\colon i \to j) \mapsto (Ff)_c$$

[1] Dette sannsynliggjør at N har en venstreadjungert funktor, noe som også stemmer Men vi skal ikke gå nærmere inn på dette.

Fi er her en funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og Ff er en naturlig transformasjon $Fi \dot{\to} Fj$. Dette betyr for vårt problem at Lim $(N \circ F)$ er definert på objekter ved

$$[q] \mapsto \mathrm{Lim}[\mathbf{Cat}([\mathbf{q}], F-)]$$

Beviset fullføres ved enten å bruke ligning (17) til å direkte finne

$$\mathrm{Lim}[\mathbf{Cat}([\mathbf{q}], F-)] = \mathbf{Cat}([\mathbf{q}], \mathrm{Lim}F)$$

eller vi kan bruke at vi er i kategorien **Set**, der det er kjent hva grenser er, til å konkludere

$$\begin{gathered} \mathrm{Lim}[\mathbf{Cat}([\mathbf{q}], F-)] = \\ \{(G_1, \ldots, G_n) \in [[\mathbf{q}], F_1] \times \cdots \times [[\mathbf{q}], F_n] \mid \text{alt kommuterer}\} = \\ \mathrm{Kjegle}([\mathbf{q}], F) \end{gathered}$$

For å bevise at N generelt ikke bevarer kogrenser ser vi først på funktoren

$$G_{\mathcal{C}} \colon \mathbf{Cat}^o \to \mathbf{Set}$$

som sender hver liten kategori $\mathcal{D}$ på mengden av funktorer $[\mathcal{D}, \mathcal{C}]$. At funktoren G sender kogrenser i **Cat** til grenser i **Set** finner vi fra ligning (18). Med $F \colon \mathcal{J} \to \mathcal{D}$ gir nemlig denne:

$$\mathbf{Cat}(\mathrm{Kolim}F, \mathcal{C}) = \mathrm{Lim}[\mathbf{Cat}(F-, \mathcal{C})]$$

La videre

$$I \colon \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Cat}$$

være inklusjonen fra $\mathbf{\Delta}$ inn i **Cat**. Det vil si at et objekt $[n] \in \mathbf{\Delta}$ sendes til kategorien $[\mathbf{n}]$, og pilene i $\mathbf{\Delta}$ sendes til de tilsvarende funktorene i **Cat**. Nå vil nerven være lik komposisjonen av $G_{\mathcal{C}}$ og I, $N = G_{\mathcal{C}} \circ I$. Problemet er at inklusjonen ikke bevarer alle kogrenser i $\mathbf{\Delta}$.

For å vise dette ser vi på et enkelt eksempel. Under har vi en pushout i $\mathbf{\Delta}$ (husk at en pushout ikke er annet enn et spesialtilfelle av en grense).

$$\begin{tikzcd} {[1]} \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\delta_1"'] & {[0]} \arrow[d, dotted, "\mathrm{Id}"] \\ {[2]} \arrow[r, dotted, "\sigma_0\sigma_1"] & {[0]} \end{tikzcd}$$

Men dersom vi har tilsvarende diagram i **Cat** blir ikke pushouten ettobjektskategorien, men snarere kategorien:

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "f"] & d \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd} \quad \text{med } g \circ f = \mathrm{Id}_c$$

Dette kommer av at vi ikke lenger har kravet om ordningsbevaring. Siden I ikke bevarer kogrenser, kan vi konkludere at nerven N heller ikke gjør det.

Vedlegg A

Figur 1

Figur 2

Figur 3

Referanser

[AL] Asperti, Andrea og Longo, Guiseppe: *Categories, Types and Structures: an introduction to category theory for the working computer scientist* The MIT press, Cambridge, Mass. 1991

[BD] Notater fra forelesninger av og samtaler med Nils Baas og Bjørn I. Dundas ved Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, NTNU

[Fra] Fraleigh, John B.: *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, Sixth edition 1999.

[Gro] Grothendieck, Alexander: *Technique de descente et théorèmes d'existence algébrique - II. Le théorème d'existence en théorie formelle des modules*, Séminare Bourbaki, 12e année, 1959/60, no 195

[ML] Mac Lane, Saunders: *Categories for the working mathematician*, Springer Verlag, New York 1998, Second edition.

[Par] Pareigis, Bodo: *Categories and Functors* Acedemic Press 1970

[Rot] Rotman, Joseph J.: *An Introduction to Homological Algebra*, Academic Press inc., New York 1979.

[Roy] Royden, H.L.: *Real Analysis* Collier MacMillan publishing co., inc, Second edition 1968

[Wal] Walters, R.F.C.: *Categories and computer science* Carslaw publications, Sydney 1991

[Yng] Young, N.: *An introduction to Hilbert Space* Cambridge Mathematical Textbooks, 1988