MA8109 Høsten 2005

Øving 1

Problem 1: Ta for deg funksjonsfølgen $\{f_n\}$ definert på intervallet $[0,1]$:

$$f_n(\omega) = \begin{cases} a_n \frac{\omega}{\omega_n}, & 0 \le \omega \le \omega_n, \\ a_n \left(2 - \frac{\omega}{\omega_n}\right), & \omega_n \le \omega \le 2\omega_n, \\ 0, & 2\omega_n \le \omega \le 1, \end{cases}$$

hvor $\lim_{n\to\infty} \omega_n = 0$ (Lag en tegning!).

(a) Vis at $\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = 0$ for alle ω, og derfor at $\int \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)\, dP(\omega) = 0$.

(b) Beregn $\lim_{n\to\infty} \int f_n dP$ for $a_n = \omega_n^{-1/2}, \omega_n^{-1}$, og ω_n^{-2}.

(c) For hvilke situasjoner i (b) kan *ikke* $h(\omega) = \max_n f_n(\omega)$ være integrabel?

Problem 2: *Øksendal Ed. 6, Exercise 2.4.*

Problem 3: *Øksendal Ed. 6, Exercise 2.7.*

Problem 4:

(a) Vis, ved å benytte Property 5 om betinget forventling i Measure and Integration at hvis $X \le Y$, vil $E(X|\mathcal{H}) \le E(Y|\mathcal{H})$..

(b) Vis at hvis $0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X$ vil $E(X_n|\mathcal{H}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E(X|\mathcal{H})$ n.o. (Merk at $X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)$ for alle ω, hvis vi godtar ∞som en grense). Vink: Bruk monoton konvergens til å vise at grensefunksjonen $Y = \lim_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{H})$ tilfresstiller alle betingelsene for $E(X|\mathcal{H})$.

Problem 5:

(a) Vis at hvis $\mathbf{\Sigma}$ er ikke-singulær (da er den altså positiv definitt!) vil

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{u}'\mathbf{x}} \exp\left(i\mathbf{u}'\mu - \frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{\Sigma}\mathbf{u}\right) d^n u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\mathbf{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)' \mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\mu)\right). \tag{1}$$

(b) Nedenfor antar vi at $\mathbf{X}$ er multivariat Gausssisk og $E(\mathbf{X}) = 0$. Benytt Taylorutviklingen av eksponensialfunksjonen i uttrykket for karakteristisk funksjon til å vise følgende nyttige identiteter:

Trippeproduktene forsvinner!:

$$E(X_1 X_2 X_3) = 0. \tag{2}$$

Fire-kumulant identiteten:

$$E(X_1X_2X_3X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3). \tag{3}$$

(Viktige i stokastisk fysikk, spesielt turbulensteori og ikke-lineær filtrering av Gaussiske signaler).