75048 Matematisk modellering, August 2000 Løsningsskisse med kommentarer

Vi antar at tetthet, spesifikk varme og varmeledningskoeffisienter er uavhengige av T. I en mer generell situasjon behøver ikke dette være tilfelle.

Oppgave 1

(a) Den generelle bevarelsesloven er

$$\frac{d}{dt}\int_R (\rho cT)dV + \int_{\partial R} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = \int_R qdV.$$

Ved å anvende divergensteoremet og flytte derivasjonstegnet undet integralet finner vi

$$\int_R \{\frac{d}{dt}(\rho cT) + \nabla\cdot\mathbf{j} - q\}dV = 0,$$

som leder til ligningen på differensialform,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho cT) + \nabla\cdot\mathbf{j} - q = 0.$$

Med $q = 0$ og $\mathbf{j} = -k\nabla T$ ender vi opp med

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\nabla^2 T = \kappa\nabla^2 T.$$

På en indre grenseflate må temperaturen og fluksen gjennom flaten være kontinuerlig. Dette kan en uttrykke som

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}+) &= T(\mathbf{r}-), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}+)\cdot\mathbf{n} &= \mathbf{j}(\mathbf{r}-)\cdot\mathbf{n}, \end{aligned}$$

der $\mathbf{n}$ er normalvektoren til grenseflaten, mens $+$ og $-$ indikerer at vi nærmer oss grenseflaten fra ulike sider. *Konveksjon* fra en overflate modelleres som oftest med et uttrykk på formen

$$-\beta(T - T_0)$$

der β er en proporsjonalitetskonstant, T er temperaturen på overflaten og T_0 er temperaturen til det omkringliggende mediet, for eksempel luft eller vann. *Stråling* modelleres ved hjelp av Stefan-Boltzmanns strålingslov

$$-\varepsilon\sigma T^4 + \varepsilon_a\sigma T_a^4$$

der σ er Stefan-Boltzmann constant, $\sigma = 5.67051\times10^{-8}\,\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$, ε er emmisiviteten ($0 \le \varepsilon \le 1$), og "a" står for omgivelsene, som stråler tilbake og varmer opp legemet vi ser på. Tilsammen gir dette en overflatebetingelse

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{r}_0) = -\beta(T(\mathbf{r}_0) - T_0) - \varepsilon\sigma T(\mathbf{r}_0)^4 + \varepsilon_a\sigma T_a^4.$$

Hvis mediet beveger seg vil fluksen få et konvektivt bidrag

$$\mathbf{j} = -k\nabla T + (\rho cT)\mathbf{v},$$

og varmeledningsligningen blir en *konveksjons-diffusjonsligning*

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho c T \mathbf{v}) = k \nabla^2 T.$$

(b) Vi anslår tiden (grovt) ved å bestemme *tidsskalaen* for varmeledning over en distanse som tilsvarer radien i et hønse-egg, dvs. $L = 2cm$. Dette gir oss

$$T = \frac{L^2}{\kappa} = \frac{(0.02)^2}{10^{-6}} s = 400s \approx 7 \text{ minutter.}$$

Hvis vi antar at radien i et strutse-egg er ca. tre ganger så stor (har ikke sjekket dette nærmere!), blir koketiden forholdet mellom radiene i kvadrat lengre, dvs. omtrent en time!

(c) Dette problemet ble behandlet i forelesningene. Inne i mediene gjelder varmeledningsligningen som bare har varmediffusivitetene som parameter. Grensebetingelsen involverer varmeledningskoeffisientene. Siden vi alltid kan føre inn dimensjonsløs temperatur ved å skrive

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)\tau,$$

ser vi derfor at

$$\tau = \tau(x, t, \kappa_1, \kappa_2, k_1, k_2).$$

Nå innser en umiddelbart at de 6 argumentene kan settes sammen til tre dimensjonsløse kombinasjoner, men dette kan også vises på tradisjonell måte ved å sette opp dimensjonsmatrisen

	x	t	κ_1	κ_2	k_1	k_2
m	1	0	2	2	1	1
s	0	1	-1	-1	-3	-3
kg	0	0	0	0	1	1
K	0	0	0	0	-1	-1

Vi ser at rangen til matrisen er 3, og resultatet følger fra Buckinghams Pi-teorem.

Siden vi vet at temperaturen kun er en funksjon av $\eta = \frac{x}{\sqrt{\kappa_1 t}}$, ser vi at

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(-\frac{x}{2\sqrt{\kappa_1}} t^{-3/2}\right) \frac{dT}{d\eta} = -\frac{1}{t} \frac{\eta}{2} \frac{dT}{d\eta}, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\kappa_1 t} \frac{d^2 T}{d\eta^2}. \end{aligned}$$

Innsatt i ligningene gir dette en *ordinær* diff.ligning for T,

$$\frac{\kappa_i}{\kappa_1} T'' + \frac{\eta}{2} T' = 0, \quad i = 1, 2.$$

Randbetingelsen i origo blir $T(0+) = T(0-)$, og at fluksen skal være kontinuerlig:

$$-k_1 \frac{\partial T}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial T}{\partial x},$$

som gir

$$\frac{k_1}{\sqrt{\kappa_1}} T'(0-) = \frac{k_2}{\sqrt{\kappa_2}} T'(0+).$$

Løsningen kan benyttes så lenge som innflytelsen fra kantene er neglisjerbar, dvs. for tider vesentlig mindre enn L^2/κ, jfr. punkt (b).

Oppgave 2:

(a) Utfra første oppgave ser vi at ligningen blir

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k\nabla^2 T + \alpha T.$$

Ved å skalere rom-koordinatene med L og tiden med $\Upsilon = L^2/\kappa$ (og beholde samme notasjon for T), får vi umiddelbart

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \nabla^2 T + \varepsilon T, \\ \varepsilon &= \frac{L^2\alpha}{k}. \end{aligned}$$

(b) Vi fører inn perturbasjonen som angitt, og dette gir ligningen

$$\dot{a}(t)f(x) = a(t)f''(x) + \varepsilon a(t)f(x),$$

som leder til separerte ligninger

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{f'' + \varepsilon f}{f} = \lambda.$$

Siden vi dermed får $a(t) = Ae^{\lambda t}$, er det et spørsmål om det er mulig at λ er større enn 0. For x-avhengigheten får vi ligningen

$$\begin{gathered} f'' + (\varepsilon - \lambda)f = 0, \\ f(0) = f(1) = 0. \end{gathered}$$

Som kjent vil dette problemet kun ha løsninger forskjellig fra 0-løsningen hvis

$$\varepsilon - \lambda = (n\pi)^2, \; n = 1, 2, \cdots .$$

Med andre ord, hvis $\varepsilon < \pi^2$, vil det ikke være noen ustabile løsninger med $\lambda > 0$.

Dette indikerer at haugene med pulver ikke kan være for store:

$$\varepsilon = \frac{L^2\alpha}{k} < \pi^2,$$

dvs. $L < \pi\sqrt{k/\alpha}$. Rent fysisk er dette rimelig: Hvis haugene er for store, rekker ikke varmen diffundere vekk og temperaturen øker. Fenomenet er velkjent i for eksempel kull-binger.

Oppgave 3

Vi kan starte med å se på endringen av antall innbyggere med alder mellom A_1 og A_2 over et kort tidsrom Δt:

$$\Delta\left(\int_{A_1}^{A_2} p(a,t)da\right) =$$

+Innbyggere som rykker opp i aldersgruppen

−Innbyggere som går ut av aldersgruppen

−Innbyggere i aldersgruppen som dør

+Innvandring

De to første bidragene er (til første orden)

$$p(A_1,t)\Delta t - p(A_2,t)\Delta t.$$

Innbyggere som dør i gruppen kan beskrives med en *mortalitet*, $m(a)$, slik at det blir (tilnærmet)

$$\left(-\int_{A_1}^{A_2} m(a)p(a,t)da\right)\Delta t.$$

Innvandring i løpet av perioden skrives på tilsvarende måte

$$\left(\int_{A_1}^{A_2} q(a)da\right)\Delta t.$$

Ligningen følger nå umiddelbart ved å føre inn dette og gå over til differensialformen.

Den andre betingelsen representerer *fødsler*, der vi antar at det kun er befolkning med alder mellom a_1 og a_2 som bidrar ($t_0 \approx 9$ måneder).

(b) For $m(a) = a$ og $q = 0$ blir ligningen

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -ap.$$

Karakteristikkene er oppgitt til å være rette linjer i (a,t)-planet, for eksempel $a = a_0 + t$. Endringen av p langs en karakteristikk blir

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}dt + \frac{\partial p}{\partial a}da$$

som gir

$$\frac{dp}{da} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -ap.$$

Denne ligningen har løsningen

$$p(a) = p(a_0)\exp\left(-\frac{a^2 - a_0^2}{2}\right).$$

Med dette resultatet er vi i stand til å løse det oppgitte problemet som vist på figuren. Ved å føre inn ligningen for karakteristikken og anta at $p(a,0) = p_0(a)$, får vi

$$p(a,t) = p_0(a-t)\exp\left(-\frac{a^2 - (a-t)^2}{2}\right)$$

Vi ser at en etterhvert trenger å løse *fødselsintegralet* for å komme seg videre oppover tidsaksen. En baby-boom som inntreffer i origo vil i sin tur påvirke fødselstallene for alle tidspunkt mellom $a_1 + t_0$ og $a_2 + t_0$, og dette vil gjentas videre, men siden tiden mellom a_1 og a_2 er mye større enn tidrommet for baby-boomen, vil virkningen smøres utover i tid etterhvert og dermed ikke bli så markert.

(c) For en stasjonær situasjon blir ligningen (under forutsetningene i (b))

$$\frac{dp}{da} = -ap,$$

og det er følgelig mulig å ha en stasjonær alderfordeling $p_0(a)$ hvis

$$\begin{aligned} p_0(a) &= P_0\exp(-a^2/2), \\ \int_{a_1}^{a_2} f(a)e^{-a^2/2}da &= 1. \end{aligned}$$

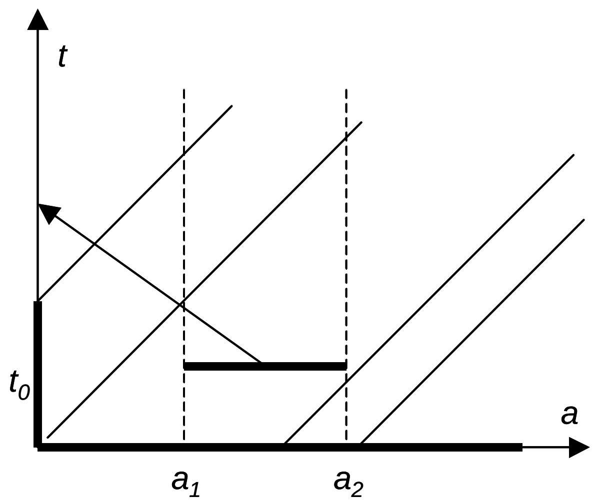

Figure 1: Løsning av ligningen ved hjelp a karakteristikker. Hvis vi kjenner løsningen på den positive a-aksen og fram til t_0 på t-aksen, kan vi vi bestemme løsningen for alle t ved å gå langs karakteristikkene og løse fødselsintegralet etterhvert.

Dette er ellers ikke eneste mulighet. Hvis

$$m(a) = \begin{cases} 0, & a \leq a_0, \\ \infty, & a_0 < a, \end{cases}$$

vil $p(a,t) = C$ for $0 \leq a \leq a_0$ være en løsning hvis

$$\int_{a_1}^{a_2} f(a)da = 1.$$

Oppgave 4

(a) Ut fra de foregående oppgavene kan vi sette opp for en sylinder med radius r og lengde L:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\rho c T \cdot (\pi r^2 L)\right] &= U^2 \frac{\pi r^2}{L}\sigma(T) - 2\pi r L \alpha T \\ &= \alpha_1 \sigma(T) - \alpha_2 T = f(T). \end{aligned}$$

Hvis spenningen varierer langsomt, vil temperaturen holde seg i nærheten av likevektstemperaturen. Forløpet er illustrert i oppsummeringen av seminaret høsten 99. Likevektstemperaturene (løsning av $f(T) = 0$) er vist på figuren, og det kan være fra 1 til 3 muligheter. Bare de der $f'(T) < 0$ er stabile, dvs. punktet til høyre eller det til venstre. Når U øker fra 0, vil vi først ligge i nærheten av likevektsløsningen til venstre. Men før eller siden vil denne kryssingen forsvinne og temperaturen hoppe raskt opp til øverste stabile tilstand. Hvis U deretter avtar, skjer det motsatte.

(b) Ligningene kan skrives

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{dt} &= f(T_1) - \beta(T_1 - T_2) \\ \frac{dT_2}{dt} &= f(T_2) + \beta(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Vi vet at det finner to ulike stabile temperaturer T_a og T_b når $\beta = 0$, og vi viser først at dette også er tilfelle når β er tilstrekkelig liten. Dette krever en smule innsikt i analyse, og følger fra

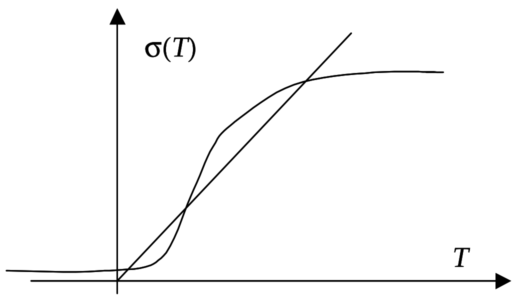

Figure 2: Likevektstemperaturene er der kurvene krysser.

Det implisitte funksjonsteoremet (argumentet kreves naturligvis ikke i detalj til eksamen). Sett

$$\begin{aligned} T_1 &= T_a + x, \\ T_2 &= T_b + y, \end{aligned}$$

og betrakt følgende ligingssystem

$$\begin{aligned} f(T_a + x) - \beta(T_a + x - T_b - y) &= g(x, y, \beta) = 0, \\ f(T_b + y) + \beta(T_a + x - T_b - y) &= h(x, y, \beta) = 0. \end{aligned}$$

Vi vet at systemet har løsningen $x = y = 0$ når $\beta = 0$. Under forutsetning av at funksjonene er deriverbare med kontinuerlig derivert, vil systemet også ha løsninger *for alle* β i en omegn om 0 hvis Jakobideterminanten

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix}$$

er forskjellig fra null når $\beta = 0$ (Dette er *Det implisitte funksjonsteorem*). Men determinanten er

$$\begin{vmatrix} f'(T_a) & 0 \\ 0 & f'(T_b) \end{vmatrix} = f'(T_a) \cdot f'(T_b) \neq 0.$$

Løsningene er kontinuerlige funksjoner av β. Når en har bestemt et stasjonære punkt ($T_a + x_0(\beta)$ og $T_b + y_0(\beta)$), er det nødvendig å analysere banene til det *lineariserte systemet*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f'(T_a + x_0) - \beta & \beta \\ \beta & f'(T_b + y_0) - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

der vi har satt $T_1 = T_a + x_0 + x$, og tilsvarende for T_2.

Når $\beta = 0$ er egenverdiene til matrisen $f'(T_a)$ og $f'(T_b)$, og følgelig er begge mindre enn null. Egenverdiene forblir reelle og negative så lenge β er tilstrekkelig liten. Dette betyr at $x(t)$ og $y(t)$ vil gå mot null når t vokser, og likevektspunktet blir en *stabil node*. Vi har bevist at selv med en svak kobling mellom motstandene er det mulig å ha to ulike likevekstemperaturer (Vi antar naturligvis at $T_a + x_0(\beta) \neq T_b + y_0(\beta)$).

Anta nå tilslutt at T_{a0} og T_{b0} er to likevektspunkter. Da er

$$\begin{aligned} f(T_{a0}) - \beta(T_{a0} - T_{b0}) &= 0, \\ f(T_{b0}) + \beta(T_{a0} - T_{b0}) &= 0. \end{aligned}$$

Hvis $T_{a0} \neq T_{b0}$ får vi fra sekantsetningen

$$\beta = \frac{1}{2}\frac{f(T_{b0}) - f(T_{a0})}{(T_{b0} - T_{a0})} = \frac{1}{2} f'(\tilde{T}),\ T_{a0} < \tilde{T} < T_{b0}.$$

Dette vil naturligvis være umulig hvis betingelsen i oppgaven er oppfylt, og følgelig må $T_{a0} = T_{b0}$ i dette tilfellet.