SIF 5036 Matematisk modellering
Modelleringsseminaret
Etterord 17. november 2002

Dermed er modelleringsseminaret over og arbeidet presentert. I dette notatet skal jeg kort oppsummere noe av det som kom opp under seminaret, men skrivet er på ingen måte ment som noen slags fasit. Generelt var vi klar over at problemkomplekset er mangesidig og til dels vanskelig. Innsatsen er (i gjennomsnitt!) klart over det som er forventet, men som dere erfarte, er det enda langt igjen før en kan sies å ha nådd full forståelse. Det er flott at så mange viste innsatsvilje og pågangsmot i seminaret, og det er vel unødvendig å si at det nettopp er det framtidige arbeidsgivere er på jakt etter!

I store trekk har vi tatt for oss følgende problemstillinger:

1. Varmetransporten gjennom veggen (Gr. 1, 2, 3, 4 og 6)
2. Modell for temperaturen i øsa (Gr. 3 og 6)
3. Avsetning av fast metall på veggen (Gr. 2, 3 og 4)
4. Modellering av pluggen (Gr. 5 og 7)
5. Gassinjeksjonen (Gr. 8)

Det har vært et par klager på at det har vært for vanskelig fysikk i oppgaven og at det ikke ble bruk for særlig avansert matematikk. Vi forsøkte å legge inn noe relevant fysikk før seminaret ved å se på eksemplene fra Fowkes og Mahoney, men det er klart at f.eks. studiet som gruppe 8 startet på, raskt leder inn i temmelig komplisert turbulensmodellering. Når det gjelder matematikk, er dette avhengig av hvor langt en kommer. Selvsagt byr ikke dimensjonsanalyse og stasjonær varmeledning på de store utfordringene, men mer inngående analyse og modellering av transient varmestrøm med ikkelineære konvektive betingelser begynner å bli rimelig komplisert.

Det er et problem med all matematikkundervisning at den gir studentene inntrykk av at metodene som undervises er uttømmende. Her har vi imidlertid sett at for eksempel løsning av partielle ligninger ved hjelp av separasjon av variable har kommet sørgelig til kort. Vi har også opplevd at det rett og slett ikke er noen vei utenom numeriske løsninger hvis en ønsker rimelig nøyaktige resultater. På den annen side har vi hatt god bruk for similaritetsløsningene, men også opplevd at de ikke forekommer der vi ventet å finne dem.

Modelleringsseminaret har i alle fall gitt meg en del ny innsikt, både for varmetransporten gjennom veggen, avsetning av metall på øsa, og pluggen.

Jeg kommer til å ta opp resultatene med Oddgeir Samset, så får vi se om det ønskelig å gå videre i en eller annen retning.

1 Varmetransporten gjennom veggen

Det kom tidlig opp under seminaret at vi *ikke* kunne regne med stasjonær varmestrøm gjennom veggen. Ved å sette inn for varmediffusjonskoeffisienten til Uniflow CD98 fra Tabell 1 i notatet

ser vi at

$$\kappa_B = \frac{k}{\rho c} = \frac{2.1}{2800 \times 840} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}} \stackrel{\circ}{=} 8.9 \times 10^{-7} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}, \tag{1}$$

Diffusjon over en strekning L foregår over en tidsskala T slik at

$$T = \frac{L^2}{\kappa_B}, \tag{2}$$

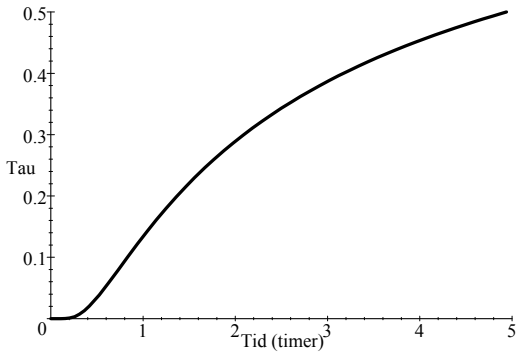
og med en tykkelse av laget på 0.12m får vi her

$$T = \frac{0.12^2}{8.9 \times 10^{-7}} \mathrm{s} \stackrel{\circ}{=} 4.5 \text{ timer}. \tag{3}$$

Siden dette er i overkant av det vi forventer, kan vi finne et bedre overslag ved å betrakte similaritetsløsningen for en halv-uendelig vegg med (dimensjonsløs) temperatur $\tau = 1$ i $x = 0$, og $\tau = 0$ for $x \to \infty$. Løsningen har formen

$$\tau(x,t) = 1 - \mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), \tag{4}$$

som er plottet for $x = 0.12\mathrm{m}$ og $\kappa = 8.9 \times 10^{-7} \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}$ i fig. **??**.



Dimensjonsløs temperatur ved $x = 0.12\mathrm{m}$ for materialet Uniflow CD98 og løsningen i ligning 4.

Vi ser at temperaturen ikke har steget med mer enn omlag 12% av den totale differensen i løpet av første timen, og tatt i betraktning at veggen har flere lag med til dels enda bedre isolasjonsmaterialer, ser det ikke ut til å være varmetap av betydning *gjennom* veggen. I alle fall er det ikke så interessant å se på den stasjonære løsningen (Dette var nytt for meg også). Som flere har vært inne på, er det imidlertid et betydelig varmetap fra smelten som går med til å varme opp veggen. Her kan en også bruke similaritetsløsningen til et overslag. Varmeinnholdet i veggen kan finnes ved å integrere over temperaturfordelingen, men samme resultat vil en også kunne regne ut fra fluksen gitt ved

$$j(x,t) = -k_B (T_m - T_\infty) \frac{\partial \tau}{\partial x} = k_B (T_m - T_\infty) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2}{\kappa t}}}{\sqrt{(\kappa t)}}\right). \tag{5}$$

Totalt varmetap (pr. flateenhet) inn i veggen i løpet av tiden fra 0 til t blir følgelig:

$$Q(t) = \int_0^t j(0,t')dt' = \frac{k_B(T_m - T_\infty)}{\sqrt{\pi\kappa}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t'}} dt' = \frac{k_B(T_m - T_\infty)}{\sqrt{\pi\kappa}} 2\sqrt{t}. \tag{6}$$

Hvis en ønsker å se på oppfyllingen av karet, må en bruke lign. 6 for hver posisjon på innsiden av veggen, og deretter integrere fra tidspunktet der smelten kommer i kontakt med veggen første gang og fram til t. Gruppe 3 benyttet ligning 5 i sin modell for temperaturutviklingen i øsa.

Som flere, blant annet Gruppe 1 har vært inne på, kan tidsskalaen for strålingstapet beregnes fra ligningen

$$\rho c V \frac{\partial T}{\partial t} = -\sigma\varepsilon \left(T^4 - T_a^4\right) A, \tag{7}$$

der V er volumet av smelten og A er arealet strålingen skjer fra. Omgivelsestemperaturen T_a er bare omlag $T_s/6$, og kan følgelig neglisjeres i starten. Som anbefalt i Lin & Segel, og som en lett kan overbevise seg om ved å løse ligningen, er det greit å finne tidsskalaen fra

$$\frac{\max|T(t)|}{\max|dT/dt|} = \frac{T_s}{\sigma\varepsilon A T_s^4/(\rho c V)} = \frac{\rho c V}{T_s^3 \sigma\varepsilon A}. \tag{8}$$

Gruppe 1 beregnet skalaen til 2.5 døgn hvis lokket er på og 3.3 timer uten lokk (En av gruppene hadde til og med funnet at emmisiviteten fra overflaten til flytende silisium er 0.51).

2 Avsetning av fast metall på veggen

I eksemplet i Fowkes og Mahoney der flytende stål størknet mot en koppervalse, brukte vi similaritetsløsninger til å vise at grenseflaten mellom fast og flytende stål beveget seg proporsjonalt med kvadratroten av t. Da brukte vi samme varmediffusjonsligning både i fast og flytende stål. Varmediffusjon i væsker er ofte av liten betydning, siden enhver liten oppvarming leder til tetthetsendringer med påfølgende oppdrifts-strømninger (såkalt *naturlig konveksjon*). I vårt tilfelle er det flytende silisiumet også satt i bevegelse av gassen som injiseres, og det vil da være riktigere å benytte en konvektiv randbetingelse mellom fast og flytende metall. Hvis grenseflaten ligger i ro, vil kontinuitet av fluks gi oss betingelsen

$$-k\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x_0-} = -\beta\left(T_s - T(x_0-,t)\right). \tag{9}$$

En slik konvektiv betingelse inneholder begge de klassiske randbetingelsene som grensetilfeller. "Uendelig" god kobling mellom vegg og væske er det samme som å si at $\beta \to \infty$. Skal fluksen forbli endelig, må da

$$T(x_0-,t) = T_s, \tag{10}$$

med andre ord en såkalt *Dirichlet-betingelse*.

Hvis koblingen forsvinner, $\beta \to 0$, blir randa isolerende og $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0$, – en *Neumann-betingelse*. En blandet betingelse som i lign. 9 kalles forøvring en *Robin-betingelse*.

Dersom det smelter eller størkner metall på grenseflaten, må vi som i eksemplet med stålet finne en modifisert randbetingelse ved å legge et kontrollvolum rundt grenseflata og anvende den

generelle bevarelsesloven. Hvis vi sier at grenseflata beskrives av $x = X(t)$, blir betingelsen som i forelesningene

$$j(X(t)+,t) - j(X(t)-,t) = \rho L \frac{dX}{dt}, \tag{11}$$

samt at temperaturen ved grenseflaten er lik smeltetemperaturen, $T(X(t)-,t) = T_m$. Videre vil

$$j(X(t)-,t) = -k\frac{\partial T}{\partial t}(X(t)-,t). \tag{12}$$

I stedet for en slik betingelse til høyre, kan vi anta at en *konvektiv betingelse ,*

$$j(X(t)+,t) = -\beta(T_s - T_m). \tag{13}$$

Hvis T_s er konstant, vil følgelig også $j(X(t)+,t)$ være konstant.

I min uvitenhet trodde jeg lenge at en også her hadde en similaritetsløsning, men måtte gi meg etter press fra Gruppe 4. Det viser seg at i motsetning til situasjonen med diffusjonsligningen på begge sider av grenseflaten, har vi nå *fått* en genuin lengdeskala i problemet vårt. Dette er lengden x_β som ville gitt samme varmefluks hvis vi hadde hatt en temperaturforskjell i det faste stoffet lik $T_s - T_m$, med andre ord,

$$-\beta(T_s - T_m) = -k\frac{T_s - T_m}{x_\beta}, \tag{14}$$

dvs.

$$x_\beta = \frac{k}{\beta}. \tag{15}$$

Ved at vi har en lengdeskala, vil vi også få en tilhørende tidsskala ved

$$t_b = \frac{x_\beta^2}{\kappa}, \tag{16}$$

og vi kan vinke farvel til similaritetsløsningene. Jeg tror muligens at dette kompliserer problemet så pass mye at det blir vanskelig å komme fram analytisk slik som i stål-problemet, men inspirert av forholdene i Bymarka for øyeblikket, kan det være interessant å se på følgende beslektede problem.

2.1 Is i kontakt med vann

Vi betrakter problemet på figur 1 der en uendelig blokk is bringes i kontakt med et uendelig reservoar av vann.

Grenseflatas posisjon er $x = X(t)$, der $X(0) = 0$. Differensialligningen for temperaturen i isen er den vanlige,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \tag{17}$$

og randbetingelsen ved is-kanten blir som ovenfor

$$j\left(X(t)^+\right) - j(X(t)^-) = \rho L\dot{X}(t), \tag{18}$$

$$T\left(X(t)^-, t\right) = T_m, \tag{19}$$

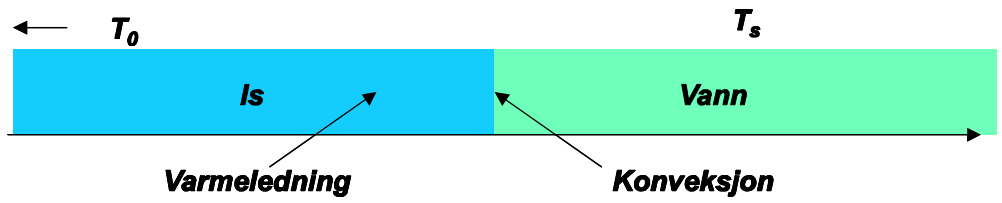


Figure 1: Is i kontakt med vann.

eller innsatt,

$$-\beta\left(T_s - T_m\right) + k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{X(t)^-} = \rho L \dot{X}\left(t\right), \tag{20}$$

$$T\left(X\left(t\right)^-, t\right) = T_m. \tag{21}$$

Vi kan føre inn dimensjonsløs temperatur,

$$T = T_0 + \left(T_s - T_0\right)\tau, \tag{22}$$

og får da

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2}, \tag{23}$$

for ligningen, mens randbetingelsene går over til

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{X(t)^-} - \frac{\beta\left(T_s - T_m\right)}{k\left(T_s - T_0\right)} = \frac{\rho L}{k\left(T_s - T_0\right)} \dot{X}\left(t\right), \tag{24}$$

$$\tau\left(X\left(t\right)^-, t\right) = \tau_m = \frac{T_m - T_0}{T_s - T_0}. \tag{25}$$

Ligningene kan forenkles noe hvis vi skalerer x og t med skalaene nevnt ovenfor, men dette gir naturligvis samme løsning og er overlatt til leseren. Vi ser at det i randbetingelsen opptrer to positive konstanter,

$$A = \frac{\beta\left(T_s - T_m\right)}{k\left(T_s - T_0\right)}, \tag{26}$$

$$B = \frac{\rho L}{k\left(T_s - T_0\right)}. \tag{27}$$

Siden

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{X(t)^-} - A = B\dot{X}\left(t\right) \tag{28}$$

vil kanten bevege seg mot høyre ($\dot{X}\left(t\right) > 0$) så lenge

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{X(t)^-} > A, \tag{29}$$

ellers vil kanten bevege seg mot venstre ($\dot{X}(t) < 0$). Hvis isen ved $t = 0$ er meget kald, vil $\frac{\partial \tau}{\partial x}\big|_{X(t)^-}$ være svært stor rett innenfor kanten, og det vil da fryse is på kanten, som i så fall vokser mot høyre.

La oss deretter se hva som skjer når $t \to \infty$. Det kan jo for eksempel tenkes at at vi får en kant som beveger seg med konstant hastighet, $\dot{X}(t) = U$. Da kan vi videre gjette at vi får en stasjonær temperaturprofil i isen i forhold til fronten, med andre ord, en løsning på formen

$$\tau(x,t) = f(x - Ut - x_0) \tag{30}$$

for $x < X(t)$. I så fall vil

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -Uf'(x - Ut - x_0), \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = f''(x - Ut - x_0), \tag{32}$$

med andre ord

$$-Uf' = \kappa f''. \tag{33}$$

Denne ligningen har generell løsning

$$f(x - Ut - x_0) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{U}{\kappa}(x - Ut - x_0)\right), \tag{34}$$

og siden vi står fritt til å velge origo for x (endrer bare på C_2), kan vi anta at kanten ligger ved $X(t) = x_0 + Ut$. Da blir løsningen for τ

$$\tau(x,t) = \tau_m \exp\left(-\frac{U}{\kappa}(x - Ut - x_0)\right),\ x < x_0 + Ut \tag{35}$$

siden vi ønsker at $\lim_{x\to-\infty} \tau(x,t) = 0$. I så fall må også U være negativ. Verdien for U bestemmes av den andre randbetingelsen,

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{X(t)^-} - A = BU. \tag{36}$$

Dvs.

$$-\tau_m \frac{U}{\kappa} - A = BU \tag{37}$$

eller

$$U = -\frac{A}{\tau_m/\kappa + B}. \tag{38}$$

Vi har dermed funnet at *uansett hvor kald isen er*, vil $U < 0$. Før eller siden vil altså isen begynne å smelte!

I motsetning til problemet vi hadde fra Fowkes og Mahoney der

$$X(t) \propto t^{1/2} \tag{39}$$

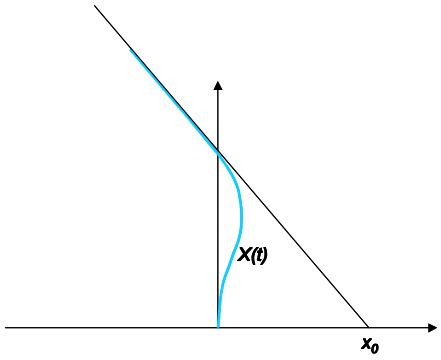


Figure 2: Mulig oppførsel for kanten som funksjon av tiden (t vertikal).

har vi nå dette bare helt i starten når

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_{X(t)^-} >> A.$$

Bildet er sannsynligvis som antydet på fig. 2. Analysen ovenfor gir ikke noe overslag over hva x_0 er, eller hvor langt fronten kommer ut på høyre side før den snur.

Siden løsningen ovenfor var basert på ren gjetning, kan en kanskje fundere på om en virkelig har funnet riktig løsning. Til det er å si at diffusjonsligningen er meget snill med entydelige løsninger. Legg forøvrig merke at en ikke kan ha *helt* stasjonære løsninger med temperaturprofiler som krummer, siden ligningen da vil være $d^2T/dx^2 = 0$.

3 Modellering av soppen

Dette var, i følge samtalene med Elkem, nybrottsland, og det mest problematiske for oss er å vite hvordan pluggen ser ut inni. Jeg forstår at Gruppe 5 var i kontakt med Elkem, som opplyste at oksydet mest sannsynlig er temmelig inhomogent og at gassen sannsynligvis strømmer i kanaler og sprekker, og ikke gjennom et homogent porøst materiale. En kan da diskutere verdien av en modell som nettopp antar at en har et homogent porøst materiale, men til det er å si at vi ofte må nøye oss med idealiserte modeller og at vi bruker disse modellene til å få innsikt, men er klar over at de også kan være misvisende.

Mange oljereservoarer (for ekempel Ekofisk-reservoaret) består forøvrig av oppsprukket porøst berg, og det er fremdeles ikke enkelt å sette opp matematiske modeller der en tar hensyn til strøm både gjennom porene og sprekkene.

Vi har tatt utgangspunkt i en modell som skissert på fig. 3 med sfærisk symmetri, selv om Oddgeirs bilder heller viste at soppen var mer langstrakt. Ingen av gruppene har sett på modelleringen av hvordan soppen vokser, og dette kompliseres jo ved at vi ikke har noen formening om hvordan det skjer. Er det for eksempel slik at oksygenet som kommer ut av soppen reagerer og fester seg som nytt oksyd på utsiden, eller fanger soppen etterhvert opp oksyd som flyter rundt i smelten?

I modellen må vi ta hensyn til både masse- (gassgjennomstrømning) og varme-transport, og det er naturlig å se på en situasjon den det strømmer en fast mengde gass pr. tidsenhet gjennom oksydet. Nedenfor har jeg støttet meg på rapportene til Gruppe 5 og 7.

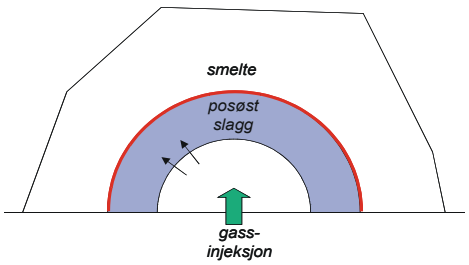


Figure 3: Enkel sopp-modell i sfærisk geometri.

For det første blir massebevarelsen for gassen triviell. Hvis gass-masse inn pr. tidsenhet er $\dot{M}$, vil masse-fluksen i avstanden r bli rettet radielt utover og ha verdien

$$j_g(r) = \frac{\dot{M}}{2\pi r^2}. \tag{40}$$

Hvis da gassen har temperaturen $T(r)$, vil varmefluksen på grunn av gass-strømmen bli

$$j_k(r) = \left(\frac{\dot{M}}{2\pi r^2}\right) c_g T. \tag{41}$$

Det er videre rimelig å anta at gassen og oksydet har samme temperatur, og den totale varme-fluksen, fremdeles i radiell retning pga. kulesymmetrien, vil følgelig få formen

$$j(r) = -k\frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\dot{M}}{2\pi r^2}\right) c_g T. \tag{42}$$

Vi ser at varmefluksen er bestemt av massefluksen og temperaturen, og derfor uavhengig av trykket i gassen. Siden det ikke finnes varmekilder inne i soppen, blir ligningen for varmetransport på vanlig måte

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (j(r)\,\hat{r}) = 0. \tag{43}$$

Hvis vi nå ikke velger å utlede differensialligningen direkte fra integralformuleringen, må vi være klar over divergens-operatoren i sfæriske koordinater har formen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2 A_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(A_\theta \sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right). \tag{44}$$

På venstre side i lign. 44 må vi bruke tetthet og varmekapasitet for kombinasjonen av oksyd og gass, slik at

$$\rho C = \rho_o c_o(1-\phi) + \rho_g c_g \phi, \tag{45}$$

der ϕ er oksydets porøsitet. Siden $\rho_g c_g \phi << \rho_o c_o(1-\phi)$, og vi kan anta at tettheten til slagget allerede har regnet med porene, blir ligningen for temperaturfordelingen

$$\rho_o c_o\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\left(-k\frac{\partial T}{\partial r} + \left(\frac{\dot{M}}{2\pi r^2}\right)c_g T\right)\right)}{\partial r}. \tag{46}$$

Hvis vi setter $\kappa = k/\left(\rho_o c_o\right)$ og

$$m = \frac{\left(\frac{\dot{M}}{2\pi}\right) c_g}{\rho_o c_o}, \tag{47}$$

blir ligningen en *konveksjons-diffusjonsligning*,

$$T_t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\left(\kappa\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{m}{r^2}T\right)\right)}{\partial r} = \kappa\left(T_{rr} + 2\frac{T_r}{r}\right) - \frac{m}{r^2}T_r. \tag{48}$$

Den generelle løsningen for en stasjonær situasjon blir løsning av

$$\kappa\left(T_{rr} + 2\frac{T_r}{r}\right) - \frac{m}{r^2}T_r = 0, \tag{49}$$

eller

$$r^2 T_{rr} + \left(2r - \frac{m}{\kappa}\right) T_r = 0, \tag{50}$$

som løses ved å føre inn T_r som ny avhengig variabel,

$$T\left(r\right) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{m}{\kappa r}\right). \tag{51}$$

Her kan en for eksempel anta konstant temperatur på indre og ytre rand, og dermed bestemme temperaturforløpet. Det er også mulig å anta 0 fluks på indre rand, dvs.

$$j\left(r_1\right) = -k\frac{\partial T}{\partial r}\left(r_1\right) + \left(\frac{\dot{M}}{2\pi r_1^2}\right) c_g T\left(r_1\right) = 0,$$

som leder til en lineær sammenheng mellom C_1 og C_2. Konstantene bestemmes deretter ved å angi temperaturen på ytre rand.

Hvis en ønsker å se hvordan et generelt initielt temperaturforløp går mot den stasjonære løsningen, er det nødvendig å studere hele ligningen. Jeg har ikke sett på det generelle problemet i detalj, men for $\dot{M} = 0$ får ligningen etter skalering formen

$$T_t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right). \tag{52}$$

Hvis vi nå ser etter separerte løsninger og fører inn $T\left(r,t\right) = R\left(r\right)U\left(t\right)$, får vi

$$RU' = U\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right), \tag{53}$$

og

$$\frac{U'}{U} = \frac{1}{R}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right) = \lambda. \tag{54}$$

For U blir ligningen $U' = \lambda U$ med løsningen $U\left(t\right) = A\exp\left(\lambda t\right)$. For R får vi

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 R'\right) = 2rR' + r^2 R'' = r^2\lambda R, \tag{55}$$

eller

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \lambda R = 0. \tag{56}$$

Hvis $\lambda = 0$ er generell løsning

$$R(r) = A + B\frac{1}{r}. \tag{57}$$

For $\lambda \neq 0$ kan ligningen omformes til en *sfærisk Besselligning*, og det er spesielt $\lambda < 0$ som er av interesse hvis løsningen skal gå mot en stasjonær løsning når $t \to \infty$. Vi setter dermed $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ og lar $x = \alpha r$ og $R(r) = S(\alpha r)$. Da blir ligningen omformet til

$$S'' + \frac{2}{x}S' + S = 0. \tag{58}$$

Denne ligningen er altså en sfærisk Besselligning (av orden 0) med løsningene $j_0(x)$ og $y_0(x)$. Disse funksjonene er (i motsetning til de vanlige Besselfunksjonene) elementære funksjoner:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x},\ y_0(x) = -\frac{\cos(x)}{x}. \tag{59}$$

Det er ellers lett å se direkte at disse to løsningene passer i lign. 58, og at de er lineært uavhengige. Generelle separasjonsløsninger av den opprinnelige ligningen blir følgelig

$$T(r,t) = e^{-\alpha^2 t}\frac{1}{r}\left(A\sin(\alpha r) + B\cos(\alpha r)\right). \tag{60}$$

Herfra er det mulig å studere ulike problemer. For eksempel vil den stasjonære temperaturfordelingen hvis $R(r_1) = T_1$ og $R(r_2) = T_2$ $(0 < r_1 < r_2)$ være

$$T(r) = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(r_1 T_1 - r_2 T_2 - \frac{r_1 r_2}{r}(T_1 - T_2)\right) \tag{61}$$

Hvis vi skal tilfredsstille en gitt startfordeling, $T(r,0) = f(r)$ (forskjellig fra løsningen i 61), leder dette til et diskret sett egenverdier og egenfunksjoner med tilhørende Fourierutvikling. Som i eksemplet med avkjølingen av koppertrommelen er det den minste egenverdien som bestemmer hvor raskt løsningen nærmer seg den stasjonære løsningen.

Med kjent temperaturprofil fra ligning 51, kan vi nå se på trykkprofilen. Darcys lov angir volumfluksen av gass gjennom et porøst materiale,

$$\mathbf{j}_V = -\frac{K}{\mu}\nabla p, \tag{62}$$

der K er permeabilitet, μ er viskositet og p er trykket. Fra denne kan vi så bestemme massefluksen i radiell retning som

$$j_g(r) = -\rho_g \frac{K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{63}$$

Massefluksen er gitt i lign. 40. Her foreslo både Gruppe 5 og 7 å bruke *ideell gasslov*, $\rho = M_m p/RT$, og dermed får vi

$$\frac{\dot{M}}{2\pi r^2} = -\frac{K M_m}{\mu R}\frac{p p_r}{T}. \tag{64}$$

Vi setter $b = \dot{M}\mu R/\left(\pi K M_m\right)$, og ender opp med en enkel ligning på formen

$$2pp_r = -b\frac{T\left(r\right)}{r^2}. \tag{65}$$

Ligning 65 gir oss dermed med innsetting fra lign. 51, $T\left(r\right) = C_1 + C_2 \exp\left(-\frac{m}{\kappa r}\right)$,

$$p^2 = -b\int^r \frac{T\left(r'\right)}{r'^2}dr' + C_3 = b\left(\frac{C_1}{r} - \frac{\kappa C_2}{m}\exp\left(-\frac{m}{\kappa r}\right)\right) + C_3 \tag{66}$$

Som forventet vil liten gass-strøm eller stor permeabilitet gi liten b og omlag konstant trykk. Dette observerte Gruppe 7, mens Gruppe 5 viste at vi kan få et betydelig trykk-fall med rimelig valg av parametre.

Gruppe 5 gikk også videre og regnet ut kraften på pluggen fra gass-trykket som funksjon av pluggstørrelsen.

3.1 Modellering av omrøringen

Dette problemkomplekset ble tatt opp av Gruppe 8 som viste stor oppfinnsomhet og presenterte interessante resultater. Dessverre er min egen bakgrunn om dette temmelig begrenset, og jeg har ikke hatt tid til å sette meg nærmere inn i det.

Derimot finnes det en kort diskusjon om modellering av gassboblene i et glass *Guinness* i A.C. Fowlers bok *Mathematical Models in the Applied Sciences*, Camb. Univ. Press, 1997, s. 296–97.

Det kan være en passende avslutning.