Modellering av jordas strålingsbalanse.

Følgende prosjekter er basert på en eksamensoppgave fra 1999, men tallene har blitt modifisert med basis i manuskriptet til Fowler. Idéen er altså å lage modeller av jordas strålingsbalanse, det vil si hvordan temperaturen på jorda varierer med innstrålingen fra sola og utstrålingen av varme til verdensrommet.

1 En enkel boksmodell

Jordas atmosfære, det øvre laget (ned til ca. 20m) av havet og de øverste metrene av jordskorpen, utgjør en masse M på ca. 3×10^{18}kg, og er den massen som kontinuerlig mottar varme fra sola og avgir varme til verdensrommet. Det totale varmeinnholdet i massen blir derfor McT, der T er temperaturen og c er (gjennomsnittlig) spesifikk varmekapasitet. Gjennomsnittlig strålingseffekt fra sola pr. flateenhet i jordas avstand fra sola er q =1370 Wm^{-2}, og jordas overflate, som er fire ganger så stor som tverrsnittsarealet, mottar følgelig en gjennomsnittlig effekt på

$$Q_0 = \frac{q \times \pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{1370}{4}\mathrm{Wm}^{-2} = 343\mathrm{Wm}^{-2}.$$

Utstrålt effekt til verdensrommet (igjen regnet pr. flaeenhet jordoverflate) er gitt av Plancks strålingslov og følgelig (maksimalt) lik

$$Q_u = \sigma T^4,$$

der $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{Wm}^{-2}\mathrm{K}^{-4}$ er Plancks konstant. Dette gir oss nå en enkel varmebalanseligning på formen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{McT}{4\pi R^2}\right) = Q_0 - Q_u.$$

Vi finner likevektstemperaturen T_0 ved å sette $Q_o - Q_u = 0$, og dermed

$$T_0 = \left(\frac{Q_0}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{343}{5.67 \times 10^{-8}}\right)^{1/4}\mathrm{K} \simeq 279\mathrm{K} \simeq 6^{\circ}\mathrm{C}.$$

Tallet ser med andre ord slettes ikke urimelig ut, men satellittmålinger forteller oss at omlag 30% av solstrålene som treffer jorda reflekteres uten å avgi energien. Fraksjonen som reflekteres kalles *albedo*, a, og for jorda er gjennomsnittlig albedo $a \approx 0.3$. Dette endrer T_0 til

$$T_e = \left(\frac{(1-a)\,Q_0}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{0.7 \times 343}{5.67 \times 10^{-8}}\right)^{1/4}\mathrm{K} \simeq 255\mathrm{K}.$$

Modellen gir oss derfor en heller kjølig verden, men atmosfære og skyer hindrer utstrålingen, slik at σT^4 endres til $\varepsilon\left(\sigma T^4\right)$, der *emmissiviteten* ε er mindre enn 1. Tilsammen

gjør dette at jorda blir beboelig. Hvis vi setter $\varepsilon = 1$, får vi ved føre inn $T = T_e + \tau$ til første orden

$$\frac{Mc}{4\pi R^2}\frac{d\tau}{dt} = -4\sigma T_e^3 \tau.$$

Ligningen også kan uttrykkes

$$\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau}{t_0} = 0,$$

der

$$t_0 = \frac{Mc/(4\pi R^2\sigma)}{4T_e^3}.$$

Siden $t_0 > 0$, blir likevektstemperaturen stabil. I eksamensoppgaven var det oppgitt at

$$\frac{Mc}{4\pi R^2\sigma} = 5 \times 10^9 \text{døgn} \times \text{K}^3,$$

og følgelig blir

$$t_0 = \frac{5 \times 10^9}{4 \times 255^3}\text{døgn} \simeq 75\text{døgn}.$$

Nå er denne tidskonstanten er omlag dobbel så lang som konstanten beregnet i Fowler, avsn. 1.3 og skyldes at massen vi ser på og som bestemmer tregheten i systemet, ikke er er den samme. Vi ser at temperaturen bruker kort tid på å omstille seg hvis vi har endringer i inn- eller utstrålingen.

Mengden av absorbert stråling fra sola ($1-a$) avhenger blant annet av overflatas farge. Under istider, der en relativt større del av jorda er snø- og isdekket, vil gjennomsnittlig absorbert energi bli mindre. Snødekke har en albedo på omlag 0.7. Leddet Q_0 er derfor foreslått endret til

$$Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T - T_0}{T_n}\right),$$

der $Q_0 - Q_a$ representerer innstrålingen under *istider* og $Q_0 + Q_a$ innstrålingen under *mellomistider*. Modellen endres dermed til

$$\frac{Mc}{4\pi R^2}\frac{dT}{dt} = Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T - T_0}{T_n}\right) - \sigma\varepsilon T^4 = f(T),$$

og stabiliteten av likevektsløsningen

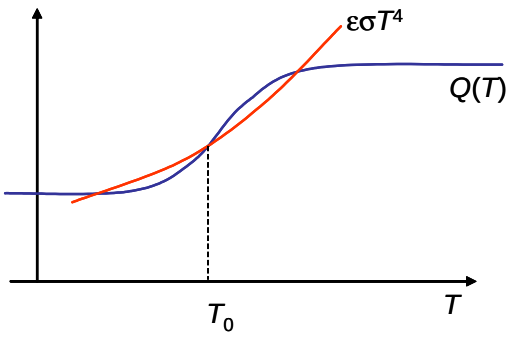
$$T_0 = \left(\frac{Q_0}{\sigma\varepsilon}\right)^{1/4},$$

avgjøres av hvorvidt $f'(T_0)$ er større eller mindre enn 0.

Nå er

$$f'(T_0) = \frac{Q_a}{T_n} - 4\varepsilon\sigma T_0^3 = \frac{Q_a}{T_n} - \frac{4}{T_0}Q_0 = \frac{Q_a}{T_n}\left(1 - \frac{4Q_0T_n}{T_0Q_a}\right).$$

Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$, blir følgelig $f'(T_0) > 0$ og T_0 er ikke lenger stabil. Situasjonen er illustrert på fig.1.



Figur 1: Figuren illustrerer at vi kan ha flere likevektsløsningene når $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$. Bare løsningene på endene er stabile.

De store klimaendringene på jorda har blant annet blitt knyttet til variasjoner i innstrålingen Q_0. Dette kan i så fall flytte kurven $Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T-T_0}{T_n}\right)$ opp eller ned. Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$, er det dermed ikke overraskende at overgangen mellom istider og mellomistider synes å skje temmelig abrupt. Nå ja, endringer med en tidkonstant på 72 dager minner mer om *The day after tomorrow*, men det ser ut til at en under uheldige forhold kan få en relativt rask overgang mellom de to ekstremene. En kan også tenke seg at $\sigma\varepsilon T^4$ flytter seg ved at ε varierer, eller at det er sammenheng mellom ε og første ledd.

Tilsvarende modeller har også blitt laget for å studere temperaturforhold for andre planeter enn jorda.

Manuskriptet til Fowler inneholder flere interessante generaliseringer av denne modellen, men det må medgis at responstiden til endringer i inn eller utstråling er temmelig rask, så hvis vi skal undersøke utviklingen over lang tidsskala, vil en her anta kvasi-stasjonær løsning.

Modellen er også enkel å løse numerisk, og det vil være mulig å eksperimentere med ulike scenarioer for variasjoner i Q-funksjonen, albedo, emissitivitet etc., slik som foreslått nedenfor.

2 Forslag til arbeid

1. **Hav/land/atmosfære**. I modellen ovenfor kunne en tenke seg å legge inn vannmassen i havet og atmosfæren som to ulike bokser. Det er klart at havet har lengre responstid overfor temperaturendringer enn atmosfæren, og med passende varmeutveksling mellom hav og luft, ville dette bli et koblet to-dimensjonalt system av diff.ligninger og derfor fremdeles enkelt å studere. Det er naturligvis mye informasjon om varmeutvekslingen mellom hav og luft, men jeg er usikker på hvor enkelt det er å grave den fram. Det som er klart, er at varmeutvekslingen kan gå begge veier, og utenfor Norge er havet varmere enn lufta nesten hele året. Varmeutvekslingen fra hav til atmosfære vil naturligvis ikke bare gå til å varme

opp atmosfæren (jfr. orkanene i Karibien). Hva vil ellers landmassene bety i dette bildet?

2. **Verdenskatatrofer**. Som sagt har modellen svært kort responstid, og det eneste som kunne tenkes å endre høyresiden over en tilsvarende tidsskala ville være en verdenskatastrofe, for eksempel en asteroidekollisjon, eller for eksempel et utbrudd av megavulkanen i Yellowstone. Hvilken situasjon ville jorden stå ovenfor i dette tilfelle? Her vet jeg ingen ting, men jeg antar at det kan være mulig å lete seg fram til noen tall på *Internett*.

3. **Sone-midlede energibalansemodeller.** Disse modellene er bare så vidt introdusert i Fowler (avsn. 1.3.1) og da i form av en ikke-lineær diffusjon/reaksjon ligning (lign. 1.66). Det første leddet på høyre side er et diffusjonsledd som sørger for utveksling av varme mellom sonene, og hvorfor ligningen akkurat har fått den formen den har, er jeg usikker på. Første punkt ville derfor være å finne ut av modelleringen (det er meget mulig at modellen har fått formen for at det skal være mulig å gjennomføre beregningen etterpå). Fowler beregner likevektsløsningen, og her møter vi, lett kamuflert, noen av kulefunksjonene som er analogien til sinus og cosinus på kuleflata. Det ville være interessant å diskretisere modellen, det vil si, bare regne med et lite antall (2 –5) soner og erstatte diffusjonsoperatoren med et koblingsledd mellom de ulike sonene. Jeg vet ingen ting om hva en kan vente seg i dette tilfellet, så resultatet er åpent.

4. **Is/albedo tilbakekobling.** Fowler introduserer tilbakekoblingen mellom isdekke og albedo omlag som vi nevnte ovenfor i avsn. 1.4.1. Dette blir forfulgt videre i oppgave 1.14 som det også kan være interessant å se på. Endring av innstråling en er knyttet opp mot de såkalte Milankovitch-syklene (avsn. 1.4.3). Det ville være interessant å studere dette med numeriske eksperimenter.

5. **Karbon-sykelen.** Karbonsykelen er modelleringen av massebalansen for karbon, eller mer interessant CO_2. Fowler formulerer en modell som kobles opp til boksmodellen inkludert is/albedo-kobling i avsn. 1.5.1, og dette gir et interessant tredimensjonals ligningsstem som redureres til to dimensjoner gjennom å bruke ytre løsning for temperaturligningen. Dette er foruten 1.5.1 også diskutert i oppgave 1.16.

Som en forstår, ligger det mange muligheter i å spille videre på dette, men det er nødvendig at hver gruppe fokuserer på ett eller høyst to av modellene ovenfor.

Tidligere erfaring med modelleringsseminarene har vist at med så mye kreativitet som deltakerne oppviser, er det uheldig å binde arbeidet opp for mye før seminaret. Det er absolutt plass for å forfølge interessante idéer underveis!