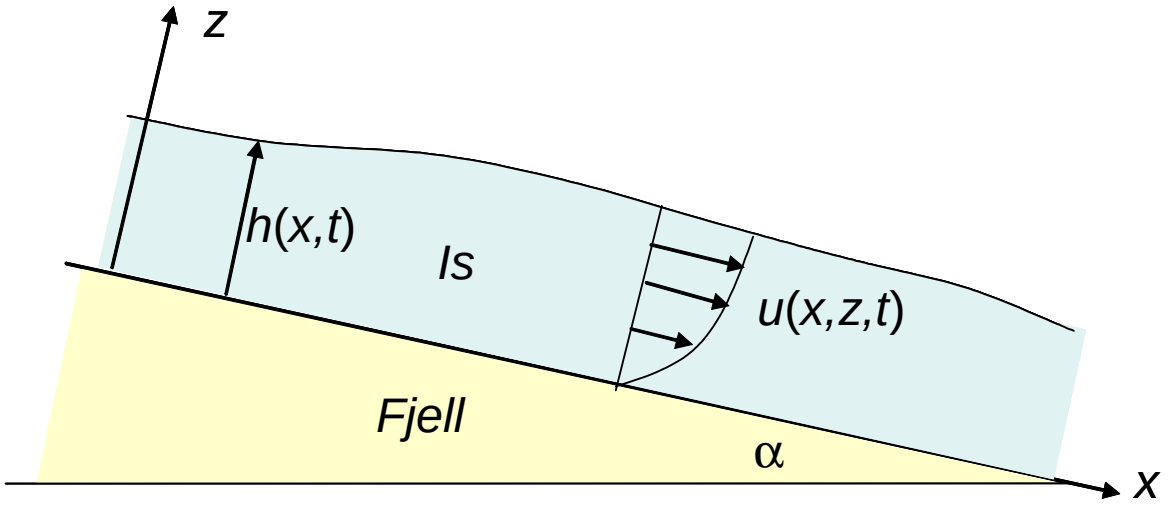
Matematisk modellering av isbreers dynamikk

1 Innledning

Isbreer er elver av is, og på samme måter som elver har de sin egen dynamikk. For eksempel eksisterer det *bølger* på isbreer. Disse bølgene beveger seg nedover breen med en fart som er betydelig høyere enn hastigheten til selve isen. Isbreene er følsomme for endringer i klimaet, og det er nå allment akseptert at hele Norge periodevis har vært isfritt etter siste istid (siste gang omkring 500 f.k.). Rundt 1990 opplevde vi at breene på Vestlandet tok til å vokse etter en lengre periode med tilbaketrekning. Dette førte til at brefronten beveget seg framover, og journalister som ekstrapolerte framrykningen spådde at flere hus ville bli knust om noen få år. Dette skjedde i Jostedalen mellom 1500 og 1700, der breen med det nå betegnende navnet *Nigardsbreen* hadde en kraftig framrykning.

Figur 1: Briksdalsbreen (ukjent tidspunkt). Bilde lastet ned fra Internet (http://www.flickr.com/photos/jannekesfotos).

I dag ser det ut til at framrykningen har stoppet opp, og breer slik som Briksdalsbreen på bildet har trukket seg betydelig tilbake [5]. Her i Trøndelag har det vært nyhetsoppslag om at den berømte Speilsalen under breen ved Blåhø i Trollheimen er i ferd med å rase



Figur 2: Modellbreen består av homogen is på et plant, hellende underlag. Isen strømmer med en hastighet som varierer i z-retningen, mens vi antar konstante forhold i y-retningen.

sammen.

En ikke-matematisk beskrivelse med mange fine bilder av isbreer finnes i boka *Norges isbreer* av Leif Ryvarden og Bjørn Wold [4]. Kompendiet *Glasiologi* av Olav Liestøl gir også en god bakgrunn [3].

Andrew Fowler har arbeidet mye med isbreer, og hans referanseartikkel i *Encyclopedia of Atmospheric Sciences* er en lettlest oversikt [1]. Manuskriptet av Fowler som vi ellers bruker i seminaret [2] inneholder derfor også et avsnitt om isbreer. Dette tar for seg både breer og is på vann, og er for omfattende å sette seg inn i for seminaret. Derfor er de viktigste tingene som inngår i etablering av en typisk en-dimensjonal modell gjennomgått nedenfor. Framstillingen tar utgangspunkt i en eksamensoppgave fra 1994.

2 Modellbreen

En isbre ligger på et plant fjell med helningsvinkel α, som vist på figur 2. I utledningen skal vi se bort fra variasjoner på tvers, og vi antar at strømningen av isen alltid er rettet langs x-aksen. Terrengprofiler, som for eksempel u-formede daler, kan bygges inn i modellen, men ligningene endrer ikke karakter av dette, og for mer kompliserte terrengprofiler kreves det at en stiller opp numeriske modeller.

Skjærspenningen τ i isen i x-retningen (og som hindrer isen over å gli ut) varierer med dybden som

$$\frac{d\tau}{dz} = -\rho g \sin\alpha,$$

der ρ er tettheten og g er tyngdeakselerasjonen. Is er egentlig en væske som oppfyller en

relasjon

$$\tau^m = \mu \frac{\partial u}{\partial z},$$

der $u(x,z,t)$ er flytehastigheten i x-retningen, μ er en konstant og $m \approx 4$. Relasjonen mellom skjærkraft og hastighetsvariasjon er med andre ord helt ulik vanlige væsker som for eksempel vann og luft, der $m = 1$. La oss først anta at breen ikke glir på underlaget, slik at $u(x,0,t) = 0$. Vanligvis regner en med at 20 – 30% av bevegelsen i isen skyldes glidning på underlaget for breene i Norge. Dette kan enkelt legges inn i modellene nedenfor. På Grønland og Svalbard er breene frosset fast til underlaget. I det minste var dette situasjonen til for noen år siden. Nå hører vi om breer på Grønland som "surger", det vil si løsner fra underlaget og glir raskt framover, smurt av vann under isen.

Med basis i forutsetningene ovenfor, kan en vise at den totale volumstrømningen pr. breddeenhet forbi et fast punkt x blir gitt av

$$Q = \int_{z=0}^{h(x,t)} u(x,z,t)\, dz = \frac{1}{\mu} (\rho g \sin\alpha)^m \frac{1}{m+2} h(x,t)^{m+2}.$$

(sjekk dette!).

En noe nøyaktigere utledning som leder til et mer komplisert uttrykk finnes i [2]. Uttrykket har (etter skalering) formen

$$Q_F = (1 - \varepsilon h_x) \frac{h^{m+2}}{m+2} + u_b h, \tag{1}$$

der u_b er glidehastigheten på underlaget, og ε en dimensjonsløs konstant av størrelsesorden 0.1.

Normalt har alle isbreer en såkalt likevektskurve (eller firngrense, *firn line*). Grensen vil være den høyeste posisjonen for overgangen mellom snødekke og blåis, og markerer skillet mellom tilvekstsområdet (akkumulasjonsområdet) ovenfor og avsmeltningsområdet (ablasjonsområdet) nedenfor. Hvis vi lar $x = 0$ være firngrensen, kan en modellere en enkel tidsuavhengig tilvekst og avsmelting (mengde pr. tid og lengdeenhet) ved hjelp av en lineær funksjon

$$a(x,t) = -\beta x.$$

Tilveksten og avsmeltningen kommer dermed inn som et kildeledd i bevarelsesloven,

$$\frac{d}{dt} \int_{x=a}^{b} h(x,t)dx + Q(h(b,t)) - Q(h(a,t)) = \int_{x=a}^{b} -\beta x dx.$$

Differensialformen følger på vanlig måte,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} + \beta x = \frac{\partial h}{\partial t} + c(h) \frac{\partial h}{\partial x} + \beta x = 0,$$

der

$$c(h) = \frac{dQ}{dh} = \frac{1}{\mu} (\rho g \sin\alpha)^m h^{m+1}.$$

Isens gjennomsnittshastighet $\bar{u}$ kan vi definere som Q/h, og dette gir oss

$$\bar{u} = \frac{Q}{h} = \frac{1}{\mu}(\rho g \sin\alpha)^m \frac{h^{m+2}}{(m+2)h} = \frac{1}{m+2}c(h).$$

Dette betyr at $c\,(h)$ (kinematisk hastighet) er omlag $m+2 \approx 6$ ganger større enn $\bar{u}$!

Hvis vi nå setter $A = (\rho g \sin\alpha)^m/\mu$, blir

$$\begin{aligned} Q\,(h) &= Ah^{m+2}/\,(m+2)\,, \\ c(h) &= Ah^{m+1}. \end{aligned}$$

Dermed blir ligningen

$$\frac{\partial h}{\partial t} + Ah^{m+1}\frac{\partial h}{\partial x} + \alpha x = 0.$$

Hvis høyden ved likevektspunktet er konstant, $h\,(0,t) = h_0$, finner vi en høydeprofil som er uavhengig av tiden ved å løse

$$Ah^{m+1}\frac{dh}{dx} = -\alpha x.$$

Denne kan vi integrere til

$$\frac{Ah^{m+2}}{m+2} = -\alpha x^2/2 \; + C,$$

og med betingelsen i $x = 0$, blir $C = Ah_0^{m+2}/(m+2)$. Hvis dette føres inn, får vi etter litt omforming

$$h = h_0\left(1 - (x/x_0)^2\right)^{1/(m+2)},$$

der

$$0 \le x \le x_0 = \sqrt{\frac{2A}{\alpha(m+2)}} \;\cdot\; h_0^{(m+2)/2}.$$

Dimensjonsløs profil for $m = 4$ er skissert på fig. 3. Legg merke til at uttrykket gir at funksjonen går loddrett ned i x-aksen. Selv om dette opplagt er en forenkling, er bratte brefall typisk for breer som ender oppe i skråninger.

Modellen ovenfor har generelt formen

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\,(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} + a\,(x,t) = 0,$$

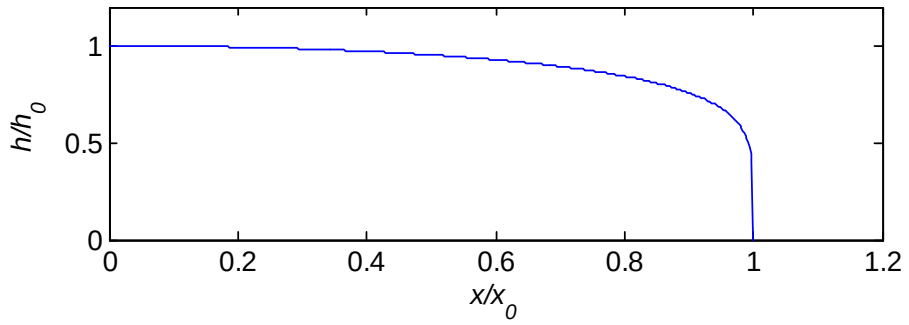
og er derfor en første ordens, kvasilineær hyperbolsk ligning.

Hvis vi først ser bort fra kildeleddet, er ligningen av samme form vi har studert tidligere,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c\,(h)\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Karakteristikkene får da formen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + c\,(h\,(x_0,t_0))\,(t-t_0)\,, \\ h &= h\,(x_0,t_0)\,. \end{aligned}$$



Figur 3: Dimensjonsløs breprofil med lineær avsmeltning

Siden $dc/dh > 0$, vil initsialbetingelser der $h(x_1, 0) > h(x_2, 0)$ for $x_1 < x_2$ lede til utvikling av sjokk-løsninger.

I dette tilfellet er det derfor enkelt å undersøke hva som skjer, for eksempel med en initsiell breprofil,

$$h(x, 0) = f(x),$$

eller en tidshistorie,

$$h(0, t) = g(t).$$

Hvis $a(x, t)$ ikke er null, trenger vi generelt å løse det ikke-lineært systemet for karakteristikkene

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{c(h)} = \frac{dh}{a(x, t)}.$$

Dette vil vanligvis kreve numeriske løsninger, men for den lineære funksjonen vi betraktet ovenfor får vi en separabel ligning mellom h og x:

$$c(h)\, dh = -\beta x dx.$$

Følgelig blir

$$Q(h) = C - \frac{\beta}{2}x^2,$$

med andre ord,

$$A\frac{h^{m+2}}{m+2} = C - \frac{\beta}{2}x^2,$$

eller

$$h(x) = \left(\frac{m+2}{A}\left(C - \frac{\beta}{2}x^2\right)\right)^{\frac{1}{m+2}}. \tag{2}$$

For å bestemme karakteristikkene (og løsningen) fullstendig, trenger vi i tillegg å beregne

$$\frac{dx}{dt} = c(h(x)). \tag{3}$$

Merk at det bare er langs disse løsningskurvene at h er gitt av lign. 2. Ligning 2 gir oss imidlertid at $h = 0$ når $C - \frac{\beta}{2}x^2$ blir 0. Dette bestemmer posisjonen til nedre ende på breen, men vi vet ikke hvilket tidpunkt det er snakk om før vi har løst lign. 3.

3 Forslag til videre undersøkelser.

Det er mange ting som kan undersøkes med denne enkle modellen. Hvordan blir breprofilen som funksjon av tiden for ulike betingelser (varierende nedbør, m.a.o. variasjoner i $a(x,t)$)? Oppførselen av brefronten er spesielt interessant når f.eks. $h(0,t)$ varierer. Dette går på en diskusjon som foregikk for noen år siden: Hvordan reagerer egentlig brefronten på en serie med snøvintere som gir stort tilskudd på toppen av breen?

Der også mulig å generalisere modellen. Hvordan skulle en for eksempel føre inn varierende helning? Med en slik modell kunne en betrakte en bre som starter et sted oppe i skråningen ovenfor likevektspunktet. Antar at hvis fjellet ikke er alt for bratt, vil høyden gå kontinuerlig til null der den starter. Dette er imidlertid ikke tilfelle der breen ender i en bratt fjellvegg. Her opptrer en "bre-gleppe" der isen slipper kontakten med fjellet.

Fowler har som nevnt ovenfor en mer realistisk fluksfunksjon, men den fører til at diff.-ligningen ikke lenger blir en første ordens hyperbolsk ligning, men derimot en ikke-lineær konveksjons/diffusjonligning,

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left((1-\varepsilon h_x)\,\frac{h^{m+2}}{m+2}\right) + a = 0.$$

Løsningen vil generelt ikke kunne angis på analytisk form, men det bør være mulig å si noe om stasjonære løsninger, slik som illustrert på Fig. 3. Går fremdeles brefonten loddrett ned i bakken? Hvordan er konvergensen av den stasjonære løsningen for $\varepsilon > 0$ mot løsningen for $\varepsilon = 0$?

For dere som er interessert i numeriske løsninger kan det være mulighet for å lage noen enkle programmer. Som nevnt på forelesningen, løses ligninger av formen ovenfor enklest ved hjelp av såkalt operatorsplitting, men sannsynligvis blir det for liten tid til dette.

I ligningen for breprofilen vil resultatet av tidsvariasjoner, f.eks. i a eller $h(0,t)$, være avhengig av hvor raske endringene er. Helt klart kan variasjonene øverst på breen være så raske at virkningen nede på breen ikke blir merkbar. Omvendt vil breen for svært langsomme variasjoner variere kvasistasjonært, dvs. at vi til enhver tid har omlag den stasjonære løsningen som svarer til den gitte verdien av a eller $h(0,t)$. Hvordan vil dette forholde seg, og når kan vi bruke en kvasistasjonær approksimasjon?

Hvordan endres breenes respons for ulik helning? Referansene kan gi en del tall om topografien for de mest kjente breene. På NVE's nettsider (www.nve.no) finnes det for eksempel mye tallmateriale.

Referanser

[1] Fowler, A.C.: Glaciers, i *Encyclopedia of Atmospheric Sciences*, Elsevier, 2003. Tilgjengelig på http://www.maths.ox.ac.uk/~fowler/courses/mathenvo/rev0158.pdf

[2] Fowler, A.C.: *Mathematics and the Environment*,
http://www.maths.ox.ac.uk/~fowler/courses/mathenvo/envonotes.pdf, 2006

[3] Liestøl, Olav: *Kompendium i glasiologi*, Univ. i Oslo,1995.

[4] Ryvarden, Leif og Bjørn Wold: *Norges isbreer*, Universitetsforlaget, 1991.

[5] Kjøllmoen, B (red.) *Glaciological investigations in Norway in 2005* http://www.nve.no/admin/FileArchive/79/report2mf.pdf