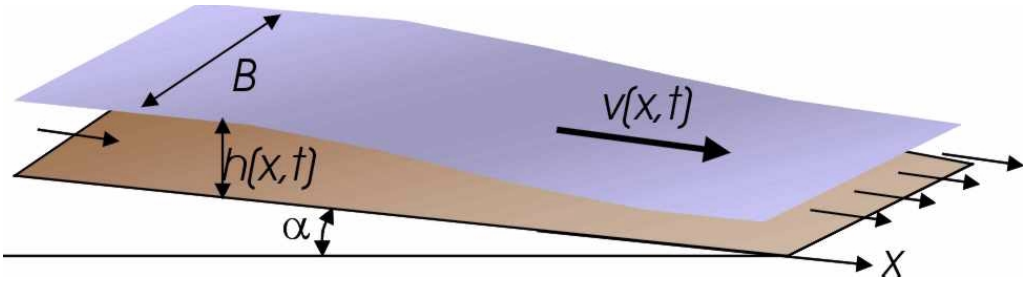


Figur 1: Idealisert bilde av ei elv.

Flodbølger i elver

Harald E. Krogstad, Oktober 2006.

Vi skal nedenfor se litt på den aller enkleste teorien for flodbølger i elver, og dette er en litt annen situasjon enn det sirkulære vannspranget som er omtalt i heftet. Vi tar for oss vann som strømmer nedover et skråplan med relativt liten heldningsvinkel α. Bredden av strømmen på tvers av skråplanet er B.

La oss anta at hastigheten på vannet er rettet ned langs skråplanet og har verdien v, som er en funksjon av posisjonen x og tiden t, og uavhengig av z og y, $v\left(x,t\right)$. Dette forutsetter at strømningen er turbulent og at vanndypet ikke er for stort. Da er hastigheten omlag konstant over dypet, men helt ved bunnen har vi et grensesjikt der forutsetningen ikke nødvendigvis er så bra. Videre antar vi at overflaten er gitt av $z = h(x,t)$.

For å modellere strømningen skal vi benytte masse- og impuls-bevarelse. Situasjonen er illustrert på fig. 1.

La oss først se hva massebevarelsen gir. I utgangspunktet har bevarelsesloven den generelle formen

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho dV + \int_{\partial R} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}d\sigma = 0.$$

Her kan en naturligvis anta at tettheten ρ er konstant og bruke $dV = Bh(x,t)dx$, mens mengden j som strømmer forbi et punkt x pr. tidsenhet har formen

$$j(x,t) = \rho v(x,t)\cdot\left(Bh\left(x,t\right)\right). \tag{1}$$

Fluksvektoren (mengde pr. flate- og tidsenhet) blir følgelig som forventet

$$\mathbf{j}\left(x,t\right) = \rho v\left(x,t\right)\hat{\imath}. \tag{2}$$

Dette kan vi så føre inn i lign. 5 for et utsnitt av elva mellom $x = a$ og $x = b$, og benytte at $\mathbf{n} = -\hat{\imath}$ i $x = a$, og $\hat{\imath}$ i $x = b$:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho Bh(x,t)dx + \left[\left(\rho v\right)\left(Bh\right)\right]_a^b = \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho Bh(x,t)dx + \left[\rho v(b,t)\cdot Bh\left(b,t\right) - \rho v(a,t)\cdot Bh\left(a,t\right)\right] = 0. \tag{4}$$

Legg merke til at fluksen er null på grenseflatene mot bunnen og overflaten, og i y-retning antar vi jo at det ikke er noen strøm. Ved å la $a \to b$, dividere med $b - a$ på vanlig måte, og flytte derivasjon innenfor integraltegnet, får vi ligningen på differensialform:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vh) = 0. \tag{5}$$

Siden er det to ukjente funksjoner, v og h som inngår, kan vi ikke løse ligningen slik den står.

Impulsbevarelsen vil her bare gi oss noe for impulsen i x-retningen, $p_x = \rho v$, og bevarelsesloven får følgende form:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b (\rho v)\, Bh dx + \left[(\rho v)\, v \cdot (Bh)\right]_a^b = \sum F_x. \tag{6}$$

Det gjenstår å spesifisere kreftene. Tyngdekraften virker direkte på vannet, og langs x-aksen utgjør denne kraftkomponenten

$$F_g = \int_a^b \rho g \sin\alpha B h\,(x,t)\, dx. \tag{7}$$

Deretter har vi trykk-kreftene. Vi ser bort fra trykket på overflaten, og på bunnen er trykkomponenten langs x-aksen null. Derimot vil vi ha et bidrag fra endeflatene. Her regner vi hydrostatisk trykk, $p = \rho g\,(h - z)$, og setter $\cos\alpha \approx 1$, slik at

$$dP = \rho g\,(h - z)\,(B dz). \tag{8}$$

Total trykkraft over flata ved $x = a$ blir følgelig

$$P\,(a,t) = \int_0^h \rho g\,(h - z)\, B dz = \rho g B \frac{h^2\,(a,t)}{2}, \tag{9}$$

og tilsvarende ved $x = b$, der trykkraften virker i negativ x-retning:

$$P\,(b,t) = -\rho g B \frac{h^2\,(b,t)}{2}. \tag{10}$$

Den siste kraften som kommer inn er friksjonskraften mot bunnen. Det viser seg, delvis basert på dimensjonsanalyse, at en kan anta at friksjonskraften pr. flateenhet (skjærspenningen i x-retning) kan skrives

$$\tau = -\rho C_f \mathbf{v}\,|\mathbf{v}|\,. \tag{11}$$

Konstanten C_f kalles for *Chézy-faktoren* (se siste side i heftet). Den totale friksjonskraften finnes derfor ved å integrere τ over bunnflata:

$$F_f = -\int_a^b \rho C_f v^2\,(B dx)\,. \tag{12}$$

Setter vi alt dette sammen og forkorter med ρB, får vi

$$\frac{d}{dt}\int_a^b vh dx + \left[(v)\, vh + \frac{g}{2}h^2\right]_a^b = \int_a^b \left(g\sin\alpha h - C_f v^2\right) dx. \tag{13}$$

Som en ser, kan det være litt møysommelig å få orden på bevarelsesloven, men prinsippet er ikke spesielt vanskelig. Differensialformuleringen følger på samme måte som ovenfor:

$$\frac{\partial (hv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(v^2 h + \frac{g}{2}h^2\right) = g \sin \alpha h - C_f v^2. \tag{14}$$

Ligningene 5 og 14 kalles gjerne *gruntvanns-ligningene* eller Saint-Venant ligningene og utgjør det som kalles et hyperbolsk system. Det finnes en teori for systemer med to ligninger som vi ikke skal gå inn på her, men ligningene kan generelt ikke løses analytisk. De er ellers mye brukt til tester av ulike numeriske teknikker for hyperbolske ligninger.

Det er imidlertid lett å se at ligningene har løsningen

$$\begin{aligned} h(x,t) &= h_0, \\ v(x,t) &= v_0, \end{aligned} \tag{15}$$

der

$$g \sin \alpha h_0 - C_f v_0^2 = 0. \tag{16}$$

Med andre ord, friksjonen balanserer tyngdekraften. Lineær stabilitetsanalyse kan fortelle om hvorvidt løsningen er stabil, og denne analysen, som er analog til den som er gjort for ustabiliteter i en bilkø, finnes i boka til Whitham [1], s. 85-86.

Under visse situasjoner blir strømningen ustabil, og mer avansert analyse leder da til såkalte "*roll waves*". *Roll waves* har vi alle sett under kraftig regnvær. Vann som renner nedover en skrå asfaltvei har da en tendens til å lage "bølger" som er nesten loddrette i forkant og beveger seg langsomt nedover i forhold til vannhastigheten (bilde nedenfor).

Hvis vi neglisjerer venstre side i lign. 14 , sier vi at tyngdekraften alltid balanserer friksjonen, mens trykk-krefter og akselerasjonskrefter neglisjeres. Dette kalles *kinetisk teori* for flodbølgene. Da vil vi få en sammenheng mellom h og v:

$$v = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{1/2}, \tag{17}$$

og følgelig får ligning 5 formen

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} \frac{\partial}{\partial x} h^{3/2} = 0. \tag{18}$$

Kinematisk hastighet blir

$$c(h) = \frac{d}{dh}\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{3/2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g \sin \alpha}{C_f}} h^{1/2} = \frac{3}{2} v(h).$$

Vi overlater til leseren å vise at hvis vannstanden oppover i elva øker, med andre ord, hvis $\partial h / \partial x < 0$, kan det utvikles et sjokk som i så fall beveger seg nedover i elva som en vegg. Fenomenet kan oppstå i elver med regulert vannføring, for eksempel i elver fra kraftverk. Langs noen av disse vil en finne advarsler fra e-verkene om at dette kan forekomme.

Figur 2: Tidevannsbåren på Qiantang River nær Hangzhou, China, også kjent som *Hangchow* eller *Hangzou Bore*. Bølgen kan bli opp til 9 meter høy og kommer in 2 ganger daglig. Den er mest utpreget rundt vår- og høstjevndøgn.

Legg merke til at hastigheten på sjokket vil være omlag 50% større enn hastigheten på vannstrømmen!

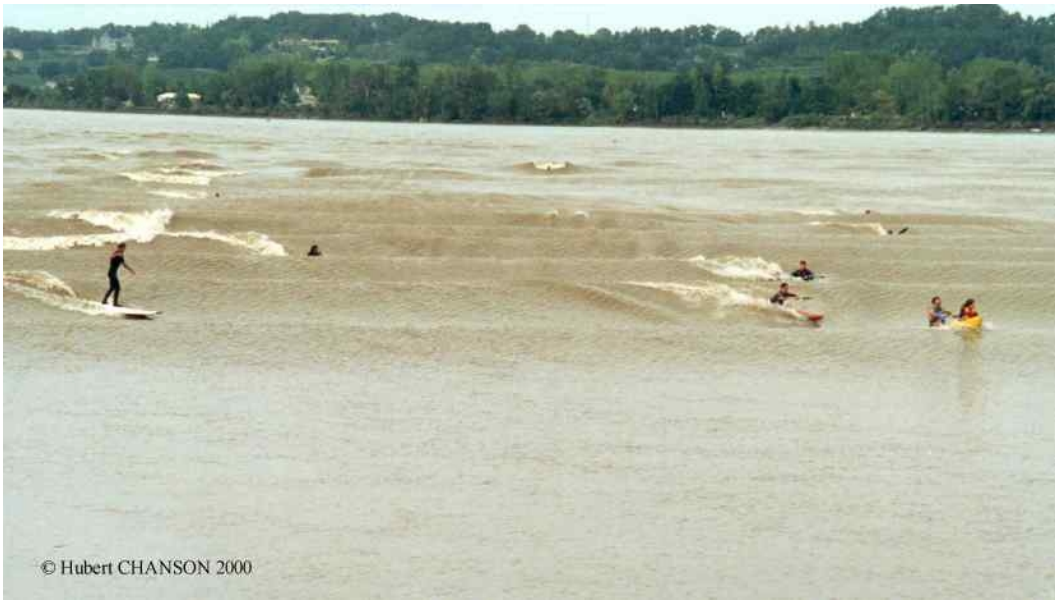
På fig. 2 og 3, som er hentet fra WEB-siden til Dr. Hubert Chanson, Univ. of Queensland, Australia (`http://www.uq.edu.au/~e2hchans/`), ser vi eksempler på noen tilsvarende situasjoner. Disse bølgene kalles tidevannsbårer (*tidal bores*), og de oppstår som sjokk-løsninger av lign. 5 og 14 i ei flat elv når tidevannet kommer inn fra munningen imot strømmen.

Fig. 2 er det mest berømte eksemplet på en tidevannsbåre. Figur 3 viser et noe annet forløp. Bildet er fra elva *Dorgonge* i Frankrike. *Seinen* hadde før i tiden en tilsvarende bølge som kunne nå helt til Paris i heldige tilfeller, men dette skal ikke lenger være så framtredende.

Det siste bildet (fig. 4) er hentet fra A.C. Fowler's bildegalleri og viser *roll waves* på en vei. Bekker som går i ei renne kan oppvise tilsvarende bølger.

Referanser

[1] Whitham, G.B.: *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley 1974.



Figur 3: Surfere på tidevannbåre som kommer inn Dordogne.

Figur 4: Roll waves på en asfaltvei under regnvær (Bildet har blitt kopiert fra http://www.maths.ox.ac.uk/~fowler/pictures/gallery.html).