

Innhold

1	DIMENSJONSANALYSE	2
1.1	Dimensjonsanalysens grunnlag	2
1.2	Buckinghams pi-teorem	3
1.3	Noen eksempler på bruk av dimensjonsanalyse	7
1.3.1	Den første atombombeeksplosjonen	7
1.3.2	Generell oppskrift for å finne dimensjonsløse kombinasjoner	8
1.3.3	Pytagoras' læresetning	8
1.3.4	Væskestrøm i rør	8
1.3.5	Vannbølger	11
1.3.6	Undersøkelse av papirfly	13
1.4	Oppsummering og kommentarer	15
2	SKALERING	17
2.1	Innføring av skalerte variable	17
2.2	Skalabetraktninger	22
2.2.1	Turbulens	22
2.2.2	Geometrisk likedannede dyr	24
3	REGULÆR PERTURBASJON	27
3.1	Prosjektilproblemet	28
3.1.1	Modell	28
3.1.2	Skalering	29
3.1.3	Løsning ved hjelp av regulær perturbasjon	30
3.1.4	Analytisk løsning	31
3.2	Florence Griffith Joyner og verdensrekorden på 100m	34
3.3	Modellering av nyrefunksjon	36
3.3.1	Formulering av matematisk modell	39
3.3.2	Skalering	42
3.3.3	Perturbasjonsregning	43
3.3.4	Epilog	46

1 DIMENSJONSANALYSE

1.1 Dimensjonsanalysens grunnlag

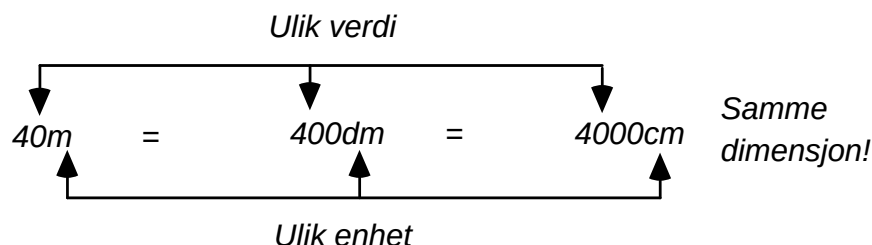
Dimensjonsanalyse er en teknikk som baserer seg på to enkle aksiomer om naturen:

- *Enhver sammenheng mellom fysiske størrelser må være dimensjonsmessig korrekt*
- *Ingen fysisk sammenheng kan avhenge av tilfeldig valgte enheter*

Selv om disse aksiomene kan synes helt trivielle, leder de likevel til et kraftig, enkelt og meget anvendelig verktøy i matematisk modellering. Samtidig blir det illustrert hvor nyttig det kan være å avdekke den *matematiske essensen* i to meget generelle og tilsynelatende lite kvantitative utsagn. Fysiske størrelser har

- *dimensjon*
- *enhet*
- *verdi*

Med *dimensjon* mener vi for eksempel *lengde*, *tid* og *masse* eller kombinasjoner av disse. Dimensjonen til en fysisk størrelse er gitt en gang for alle. Når vi arbeider med fysiske størrelser, trenger vi *måleenheter*, og som vi vet finnes det et utall enheter. For dimensjonen *lengde* har vi for eksempel *cm*, *m*, *km*, *fot*, *tomme* osv. Når vi endrer måleenheten, endrer vi også den tilhørende (numeriske) *verdien* på den fysiske størrelsen. Dette er illustrert på figur 1.



Figur 1: Den fysiske dimensjonen er den samme, mens den numeriske verdien endres når måleenheten endres.

La R være en fysisk størrelse. Vi skal ikke gå inn på filosofien bak begrepet "fysisk størrelse", men intuitivt forstår vi at jordas masse er en fysisk størrelse, mens terningkast 6 i en konsertanmeldelse ikke er det. Nedenfor er det hensiktsmessig å ha en notasjon for *enheten* til R , og vi vil skrive dette $[R]$. Verdien til R når vi bruker en gitt enhet, betegner vi $v(R)$. Dette er ikke standard betegnelser, men de er hensiktsmessige å bruke her.

At en fysisk relasjon eller sammenheng er *dimensjonsmessig korrekt*, betyr for eksempel at en ikke ender opp med ulike enheter for størrelsene på hver sin side av en ligning.

Størrelse	Dimensjonsbetegnelse	SI enhet
Masse	M	kilo (kg)
Lengde	L	meter (m)
Tid	T	sekund (s)
Elektrisk strømstyrke	I	ampere (A)
Absolutt temperatur	Θ	Kelvin (K)
Mengde substans	n	Mol (mol)
Lysstyrke	–	Candela (Cd)

Tabell 1: Fundamentale fysiske størrelser (*Fundamental Units*) og enheter i SI-systemet. De eksakte definisjonene for enhetene finnes f.eks. på Wikipedia.

Vi innser lett at formelen $S = \frac{1}{2}gt^2$ er dimensjonsmessig korrekt siden

$$\begin{aligned}[S] &= \text{m}, \\ [g] &= \text{m/s}^2, \\ [t] &= \text{s}.\end{aligned}\tag{1}$$

Derimot vil en i litteraturen, til og med i lærebøker, kunne finne formler av typen

$$S = 4.9 \times t^2\tag{2}$$

Slike formler, som naturligvis blir feil hvis vi bruker feil enheter, er egentlig en uting og betyr gjerne at en ikke helt forstår hva som er sammenhengen.

I fysikk opereres det med et sett fundamentale størrelser som angitt i Tabell 1. Ingen av disse avhenger av noen av de andre, og alle fysiske størrelser har enhet som kan uttrykkes som en kombinasjon av enhetene til de fundamentale størrelsene (dette kan betraktes som definisjonen av en fysisk størrelse).

1.2 Buckingham's pi-teorem

Buckingham's pi-teorem trekker ut det matematiske innholdet av de to aksiomene i innledningen. Det noe merkelige navnet kommer fra de dimensjonsløse størrelsene som vi ender opp med når vi anvender teoremet. Disse betegnes gjerne $\pi_1, \pi_2, \dots$ (også Π brukes i stedet for π).

La oss se nærmere på hva som ligger i begrepet *en relasjon mellom fysiske størrelser*. En relasjon er en sammenheng eller formel, det vil si en ligning som vi kan skrive

$$\Phi(R_1, R_2, \dots, R_M) = 0,\tag{3}$$

der Φ betegner en funksjon. Vi kunne eventuelt også skrive dette på andre måter, som for eksempel

$$R_1 = \Psi(R_2, \dots, R_M).\tag{4}$$

Hvis vi velger oss et sett fundamentale enheter, og bruker disse i benevningene til alle størrelsene som inngår, må vi med andre ord ha

$$\Phi(v(R_1), v(R_2), \dots, v(R_M)) = 0.\tag{5}$$

I praksis kunne vi for eksempel angi $v(R_2), \dots, v(R_M)$ og så beregne $v(R_1)$ fra relasjonen. Nå er det i utgangspunktet ikke sikkert at det finnes en relasjon mellom størrelsene $R_1, \dots, R_M$. Hvis

vi betrakter S og t der $[S] = \text{m}$ og $[t] = \text{s}$, så finnes det ingen gyldig fysisk relasjon som *kun* inneholder disse to størrelsene. Vi trenger i det minste en størrelse til, slik som i de velkjente formlene $S = gt^2/2$ eller $S = Vt$. Ved bare å betrakte størrelsene en har for seg, kan en derfor ofte bare på grunnlag av benevningene si om de kan kombineres til en fornuftig relasjon.

For å undersøke dette nærmere, lønner det seg å lage en såkalt *dimensjonsmatrise* som inneholder eksponentene til de fundamentale enhetene i benevningen til størrelsene vi har for oss.

Hvis $[S] = \text{m}$, $[t] = \text{s}$ og $[g] = \text{ms}^{-2}$, så er dimensjonsmatrisen

	S	t	g
m	1	0	1
s	0	1	-2

(6)

La oss allerede nå gjøre oppmerksom på at vi bruker enheter i første kolonne. Egentlig hadde det vært mer korrekt å bruke de universelle dimensjonsbetegnelsene L, T, M osv., og dette vil en finne i mange lærebøker. Dimensjonsmatrisen forteller oss hvordan dimensjonen er på størrelsene som inngår, men siden vi undersøker dette ved å se på enhetene, skriver vi likegodt enhetene i stedet for dimensjonsbetegnelsene.

La nå helt generelt $F_1, F_2, \dots, F_N$ betegne de fundamentale enhetene i Tabell 1. Benevningen til alle fysiske størrelser kan uttrykkes ved hjelp av disse, for eksempel vil *energi* ha benevningen "kgm²/s²". Rent abstrakt kan vi følgelig skrive

$$\begin{aligned}
 [R_1] &= F_1^{a_{11}} F_2^{a_{21}} \dots F_N^{a_{N1}}, \\
 &\vdots \\
 [R_M] &= F_1^{a_{1M}} F_2^{a_{2M}} \dots F_N^{a_{NM}}.
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Dette gir oss dimensjonsmatrisen $\mathbf{A}$:

	R_1	R_2	$\dots$	R_M
F_1	a_{11}			a_{1M}
F_2	$\vdots$	$\mathbf{A}$		
$\vdots$				
F_N	a_{N1}	$\dots$		a_{NM}

(8)

En sier at $R_1, \dots, R_r$ har *uavhengig dimensjon* hvis det er umulig å lage en (ikke-triviell) dimensjonsløs kombinasjon av $R_1, \dots, R_r$ på formen

$$R_1^{\lambda_1} R_2^{\lambda_2} \times \dots \times R_r^{\lambda_r}. \tag{9}$$

For å se hva dette betyr, finner vi benevningen til et slikt uttrykk:

$$\begin{aligned}
 \left[R_1^{\lambda_1} R_2^{\lambda_2} \times \dots \times R_r^{\lambda_r} \right] &= F_1^{a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1r}\lambda_r} \times \\
 &\times F_2^{a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2r}\lambda_r} \times \dots \\
 &\dots \times F_N^{a_{N1}\lambda_1 + a_{N2}\lambda_2 + \dots + a_{Nr}\lambda_r}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

At $R_1, \dots, R_r$ har uavhengig dimensjon, innebærer med andre ord at ligningssystemet

$$\begin{aligned}
 a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \dots + a_{1r}\lambda_r &= 0, \\
 a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \dots + a_{2r}\lambda_r &= 0, \\
 &\vdots \\
 a_{N1}\lambda_1 + a_{N2}\lambda_2 + \dots + a_{Nr}\lambda_r &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

kun har den trivielle løsningen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0. \quad (12)$$

Vi husker fra teorien for lineære lignings-systemer at dette igjen er det samme som at kolonn-vektorene

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{N1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{N2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{Nr} \end{bmatrix} \quad (13)$$

er *lineært uavhengige*. Dermed har vi fastslått at $R_1, \dots, R_r$ har uavhengig dimensjon hvis og bare hvis den tilhørende dimensjonsmatrisen har lineært uavhengige kolonner. Siden vektorene har lengde N , må i alle fall $r \leq N$ for at dette skal være mulig. Hvis vi går tilbake til eksemplet ovenfor, ser vi at S og t har uavhengig dimensjon. Det har også $\{S, g\}$ og $\{t, g\}$. Derimot har ikke S, t og g uavhengig dimensjon.

Hvis vi nå har en generell dimensjonsmatrise, ser vi at det maksimale antall størrelser med uavhengig dimensjon er lik maksimum antall kolonner som er lineært uavhengige. Dette kalles i lineær algebra *rangen* til matrisen. La oss anta at vi har ordnet oss slik at $R_1, \dots, R_r$ har uavhengig dimensjon, og at r nettopp er rangen på $\mathbf{A}$, dvs. at r er så stor som mulig. Vi kan anta at $r < M$ (Hvis $r = M$, har *alle* størrelsene uavhengig dimensjon og det vil *ikke* finnes noen dimensjonsmessig korrekt relasjon mellom størrelsene). Ut fra forutsetningen kan vi ved hjelp av $R_1, \dots, R_r$ lage oss kombinasjoner med $R_{r+1}, \dots, R_M$ slik at

$$\begin{aligned} \pi_1 &= R_{r+1} / (R_1^\bullet \times \dots \times R_r^\bullet) \\ \pi_2 &= R_{r+2} / (R_1^\bullet \times \dots \times R_r^\bullet) \\ &\vdots \\ \pi_{M-r} &= R_M / (R_1^\bullet \times \dots \times R_r^\bullet) \end{aligned} \quad (14)$$

er dimensjonsløse. Her betegner $\cdot$ passende eksponenter som vi ikke bryr oss om å spesifisere. Hvis vi har en relasjon

$$\Phi(R_1, R_2, \dots, R_M) = 0, \quad (15)$$

kan vi føre inn for $R_{r+1}, \dots, R_M$ og ordne opp slik at vi får en ny, men ekvivalent, relasjon

$$\Psi(R_1, R_2, \dots, R_r, \pi_1, \dots, \pi_{M-r}) = 0. \quad (16)$$

Vi påstår nå: *Hvis $R_1, \dots, R_r$ har uavhengig dimensjon, så kan vi velge oss ulike sett fundamentale enheter slik at verdiene $v(R_1), v(R_2), \dots, v(R_r)$ blir vilkårlige, positive tall!*

Dette er greit å se hvis vi bare har en størrelse, for eksempel $R_1 = 40\text{m}$. Måler vi R_1 i centimeter, blir $v(R_1) = 4000$, målt i kilometer blir $v(R_1) = 0.04$, og så videre.

Hvis påstanden er riktig, har vi fått følgende interessante situasjon: Uansett påfunn av enheter, vil

$$\Psi(v(R_1), v(R_2), \dots, v(R_r), v(\pi_1), \dots, v(\pi_{M-r})) = 0. \quad (17)$$

Mens de r første variablene dermed kan variere over alle positive tall alt etter hvordan vi velger enhetene, vil de $M - r$ siste variablene være konstante under slike endringer. Som funksjon av M variable vil derfor Ψ alltid være helt uberørt av verdien på de r første. Med andre ord, Ψ kan egentlig bare være avhengig av $\pi_1, \dots, \pi_{M-r}$!

Vi har dermed fått redusert vår relasjon med M variable, $\Phi(R_1, R_2, \dots, R_M) = 0$, til en ny relasjon $\Psi(\pi_1, \dots, \pi_{M-r}) = 0$ med bare $M - r$ variable. Bortsett fra påstanden som vi skal vise nedenfor, har vi nå bevist *Buckingham's pi-teorem*:

Hvis det fins en relasjon

$$\Phi(R_1, R_2, \dots, R_M) = 0 \quad (18)$$

mellom størrelsene $R_1, R_2, \dots, R_M$, så fins det også en ekvivalent relasjon

$$\Psi(\pi_1, \dots, \pi_{M-r}) = 0, \quad (19)$$

der r er rangen til dimensjonsmatrisen.

Merk at setningen forutsetter at det fins en relasjon mellom $R_1, R_2, \dots, R_M$. Dette må vi finne ut av før vi kan anvende setningen. Buckingham's pi-teorem reduserer antallet parametre, og hvis ingen av de dimensjonsløse π -ene er helt overflødige, er $M - r$ det minst mulig antall variable vi kan ha i problemet vårt.

I beviset ovenfor benyttet vi $R_1, \dots, R_r$ til å lage dimensjonsløse kombinasjoner. Disse variablene kalles gjerne *kjernevariable*. Vanligvis er det flere muligheter for kjernevariable, og hvilke som er hensiktsmessig avhenger av problemet.

Det er lett å sette opp en formell prosedyre for å bestemme π -ene (se avsnitt 1.3.2 nedenfor). Denne står også i de fleste lærebøker, for eksempel [3], men oftest er det like enkelt å finne kombinasjonene ved inspeksjon, prøving og feiling. Merk at antallet dimensjonsløse variable skal bli det samme uansett valg av kjernevariable og kombinasjoner. I prinsippet er alle likeverdige.

I resten av dette avsnittet skal vi for spesielt interesserte vise påstanden ovenfor.

Vi antar derfor at $R_1, \dots, R_r$ har uavhengig dimensjon, og at dimensjonsmatrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{Nr} \end{bmatrix} \quad (20)$$

har rang r . En kjent setning i lineær algebra sier at rangen til en matrise $\mathbf{A}$ er den samme som rangen til den transponerte matrisen $\mathbf{A}^T$. Det viser seg at denne setningen er nettopp hva vi trenger for å gjennomføre beviset.

La oss anta at med de fundamentale enhetene $F_1, F_2, \dots, F_N$ har R_i verdiene $v_F(R_i)$, $i = 1, \dots, r$, og med et annet sett fundamentale enheter $G_1, G_2, \dots, G_N$ (for de samme størrelsene) verdiene $v_G(R_i)$, $i = 1, \dots, r$. Sett $x_i = F_i/G_i$. Da får vi:

$$\begin{aligned} R_i &= v_F(R_i) F_1^{a_{1i}} F_2^{a_{2i}} \cdots F_N^{a_{Ni}} \\ &= v_F(R_i) x_1^{a_{1i}} G_1^{a_{1i}} x_2^{a_{2i}} G_2^{a_{2i}} \cdots x_N^{a_{Ni}} G_N^{a_{Ni}} \\ &= v_F(R_i) x_1^{a_{1i}} x_2^{a_{2i}} \cdots x_N^{a_{Ni}} G_1^{a_{1i}} G_2^{a_{2i}} \cdots G_N^{a_{Ni}} \\ &= v_G(R_i) G_1^{a_{1i}} G_2^{a_{2i}} \cdots G_N^{a_{Ni}} \end{aligned} \quad (21)$$

Vi har med andre ord

$$v_F(R_i) x_1^{a_{1i}} x_2^{a_{2i}} \cdots x_N^{a_{Ni}} = v_G(R_i), \quad i = 1, \dots, r. \quad (22)$$

Hvis vi nå tar logaritmen på begge sider, ender vi opp med et lineært ligningsystem på formen

$$\begin{aligned} a_{11} \log(x_1) + \cdots + a_{N1} \log(x_N) &= \log(v_G(R_1)) - \log(v_F(R_1)), \\ a_{12} \log(x_1) + \cdots + a_{N2} \log(x_N) &= \log(v_G(R_2)) - \log(v_F(R_2)) \\ &\vdots \\ a_{1r} \log(x_1) + \cdots + a_{Nr} \log(x_N) &= \log(v_G(R_r)) - \log(v_F(R_r)) \end{aligned} \quad (23)$$

Vi gjenkjenner koeffisientmatrisen til ligningssystemet som den *transponerte av dimensjonsmatrisen*. Siden vi har r ligninger og (etter setningen fra lineær algebra) r lineært uavhengige kolonner i koeffisientmatrisen, vil dette systemet ha løsninger $\log(x_1), \dots, \log(x_N)$ (ikke nødvendigvis en entydig løsning) *uansett valg av høyreside*. Men det betyr nettopp at vi først kan spesifisere $v_G(R_1), \dots, v_G(R_r)$ til hva vi måtte ønske, deretter finne $\log(x_1), \dots, \log(x_N)$, så $x_1, \dots, x_N$, og til slutt spesial-tilpassede G -enheter, $G_i = F_i/x_i$, $i = 1, \dots, r$.

1.3 Noen eksempler på bruk av dimensjonsanalyse

1.3.1 Den første atombombeeksplosjonen

Den engelske fysikeren G.I. Taylor betraktet en amatørfilm av amerikanernes første atombombeeksplosjon i Nevadaørkenen og målte radius (r) på ildkulen som funksjon av tiden (t). Han resonnererte seg fram til at r , ved siden av tiden t , ville være avhengig av energien (e) som er frigitt i eksplosjonen og tettheten (ρ) i lufta, siden flammefronten skal akselerere masse. Dermed antok han at vi har en relasjon $\Phi(r, t, \rho, e) = 0$, og satte opp følgende dimensjonsmatrise

	r	t	ρ	e
kg	0	0	1	1
m	1	0	-3	2
s	0	1	0	-2

(24)

Legg merke til at vi kan finne enheten for energi, uttrykt ved hjelp av de fundamentale enhetene, ved å tenke på kjente formler fra fysikken. For eksempel vet vi at energi er kraft $\times$ vei, og at kraft er masse $\times$ akselerasjon. Dette gir oss

$$[e] = \text{Nm} = (\text{kgm/s}^2)\text{m} = \text{kgm}^2/\text{s}^2.$$

Dimensjonsmatrisen ovenfor har rang 3, og følgelig fins det $4 - 3 = 1$ dimensjonsløs parameter. Dette betyr at vi har en dimensjonsløs relasjon på formen

$$\pi_1 = C \tag{25}$$

der C er en konstant. Vi finner π_1 ved å prøve oss fram.

$$\left[\frac{e}{\rho} \right] = \frac{\text{Nm}}{\text{kg/m}^3} = \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \frac{\text{m}^3}{\text{kg}} = \frac{\text{m}^5}{\text{s}^2}, \tag{26}$$

og følgende kombinasjon er derfor dimensjonsløs

$$\pi_1 = \frac{e}{\rho} \frac{t^2}{r^5}. \tag{27}$$

Dette gir følgende enkle formel:

$$e = C \rho \frac{r^5}{t^2}. \tag{28}$$

Konstanten C kan vi ikke bestemme nærmere, men fra amatørfilmen var G. I. Taylor i stand til å finne forholdet r^5/t^2 , og ved å sette $C = 1$, fikk han at $e \approx 10^{14} \text{J}$. Det viste seg at dette var innenfor en faktor 2 av det som var beregnet! Publiseringen av energien, som naturligvis var ”top secret”, vakte stor bestyrtelse hos amerikanerne da den kom på trykk som et leserinnlegg i *The Times*.

1.3.2 Generell oppskrift for å finne dimensjonsløse kombinasjoner

Hvis det er vanskelig å se de dimensjonsløse kombinasjonene direkte, kan en lage seg et ligningssystem for eksponentene som vil inngå. Metoden kan illustreres ved hjelp av eksemplet ovenfor. Her er vi på jakt etter en dimensjonsløs kombinasjon på formen $\pi = e^x \rho^y r^z t^u$ og må følgelig bestemme $\{x, y, z, u\}$. Siden vi allerede kjenner enhetene på de enkelte størrelsene som inngår, får vi

$$\begin{aligned} [\pi] &= [e^x \rho^y r^z t^u] \\ &= (\text{kg}^x \text{m}^{2x} \text{s}^{-2x}) (\text{kg}^y \text{m}^{-3y}) (\text{m}^z) (\text{s}^u) \\ &= \text{kg}^{x+y} \text{m}^{2x-3y+z} \text{s}^{-2x+u}. \end{aligned}$$

Konstanten π er dimensjonsløs, så derfor må

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ 2x - 3y + z &= 0, \\ -2x + u &= 0. \end{aligned}$$

Vi finner naturligvis ikke en entydig løsning, men velger vi $x = 1$, følger det lett at $y = -1$, $z = -5$, og $u = 2$, med andre ord, akkurat det vi visste fra før. Det er ingen grunn til å bruke denne omstendelige metoden hvis det er mulig å se resultatet direkte.

1.3.3 Pytagoras' læresetning

Siden en rettvinklet trekant er fullstendig bestemt av hypotenusen (c) og den minste vinkelen ($\alpha_{\min}$), må det finnes en relasjon mellom arealet (A) av trekanten, hypotenusen og vinkelen,

$$\Phi(c, A, \alpha_{\min}) = 0. \quad (29)$$

Det er greit å sette opp dimensjonsmatrisen:

	A	c	$\alpha_{\min}$
m	2	1	0

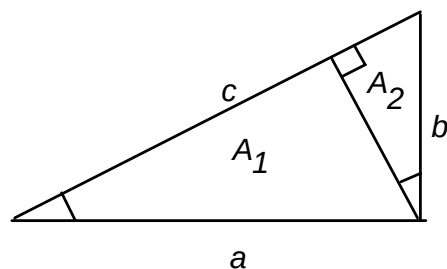
(En vinkel måles i radianer, som er forholdet mellom to lengder og er følgelig dimensjonsløs). Siden rangen er 1, er det 2 dimensjonsløse parametre, A/c^2 og $\alpha_{\min}$, og vi får $A = c^2 f(\alpha_{\min})$. Fra figur 2 ser vi videre at $A = A_1 + A_2$, og dermed vil $c^2 f(\alpha_{\min}) = a^2 f(\alpha_{\min}) + b^2 f(\alpha_{\min})$, eller $c^2 = a^2 + b^2$, som er enda et nytt bevis for setningen!

1.3.4 Væskestrøm i rør

Vi skal finne et uttrykk for trykkfallet gjennom et sylindrisk rør der det strømmes en væske, og vi antar at størrelsene i tabell 2 har betydning.

Når det gjelder viskositet, så er dette en proporsjonalitetskonstant mellom skjærspenning (kraft/flateenhet), for eksempel σ_{yx} , og endringer i hastigheten pr. lengdeenhet, $\partial u / \partial y$, normalt på kraftretningen, $\sigma_{yx} = \mu \partial u / \partial y$. Dermed blir enheten for μ :

$$[\mu] = \frac{[\sigma_{yx}]}{[\partial u / \partial y]} = \frac{(\text{kgm/s}^2)/\text{m}^2}{(\text{m/s})/\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{ms}}. \quad (30)$$



Figur 2: Arealet av den store trekanten er summen av arealene av de to små.

Størrelse	Betegnelse	Enhet
Trykkfall	P	$\text{N/m}^2 = \text{kg/s}^2\text{m}$
Middelhastighet	v	m/s
Rørdiamter	D	m
Rørlengde	L	m
Ruhet av rørveggen	e	m
Viskositet	μ	kg/ms
Tetthet til væsken	ρ	kg/m^3

Tabell 2: Størrelser som kan inngå i uttrykket for trykkfallet i røret

Målet for ruhet (e) kunne for eksempel være standardavviket rundt middelveiden av veggposisjonen. Naturligvis vil størrelsen på e kunne variere over flere størrelsesordener ettersom det er glassrør, stålrør, sementrør eller vannkraft-tunneler det er snakk om! Ut fra tabell 2 får vi dimensjonsmatrisen i tabell 3.

Vi ser at rangen er 3 og følgelig har vi $7 - 3 = 4$ dimensjonsløse størrelser. I dette eksemplet er det lite hensiktsmessig å benytte P som kjernevariabel siden vi ønsker å uttrykke P ved hjelp av de andre størrelsene. Et mulig valg er $\{v, D, \rho\}$ siden determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0, \quad (31)$$

og kolonnene er følgelig lineært uavhengige.

Neste steg blir å forme dimensjonsløse kombinasjoner der de resterende variablene inngår. Det

	P	v	D	L	e	μ	ρ
kg	1	0	0	0	0	1	1
m	-1	1	1	1	1	-1	-3
s	-2	-1	0	0	0	-1	0

Tabell 3: Dimensjonsmatrise for størrelsene som inngår i uttrykket for trykkfallet

er lett å sjekke at følgende kombinasjoner er mulige valg:

$$\begin{aligned}\pi_1 &= P/(v^2\rho), \\ \pi_2 &= L/D, \\ \pi_3 &= e/D, \\ \pi_4 &= vD\rho/\mu.\end{aligned}\tag{32}$$

(Det finnes andre kombinasjoner, men siden vi ikke er de første som utfører denne øvelsen, har vi valgt å holde oss til de som en vil finne i litteraturen). Siden vi ønsker P uttrykt ved hjelp av de andre størrelsene, er det naturlig å tenke seg en relasjon

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \pi_4).\tag{33}$$

Nå er det videre rimelig å anta (og dette er verifisert gjennom eksperimenter) at trykkfallet er proporsjonalt med L . Følgelig må vi kunne skrive

$$\pi_1 = \pi_2\Phi_2(\pi_3, \pi_4),\tag{34}$$

eller

$$P = \frac{L\rho v^2}{D}\Phi_2\left(\frac{e}{D}, \frac{vD\rho}{\mu}\right).\tag{35}$$

I strømningsmekanikk brukes $\Phi_2 = 2f_F$ der f_F kalles *Fannings friksjonsfaktor*,

$$f_F = f_F\left(\frac{e}{D}, \frac{vD\rho}{\mu}\right).\tag{36}$$

Størrelsen e/D betegnes med ε og kalles rørets *relative ruhet*. Den andre størrelsen,

$$Re = \frac{\rho Dv}{\mu},\tag{37}$$

er det velkjente *Reynolds tall*. Vi har altså kommet fram til at

$$P = 2\frac{L\rho v^2}{D}f_F(\varepsilon, Re)\tag{38}$$

I litteraturen vil en også støte på friksjonsfaktoren $f_D = 4f_F$ som kalles *Darcy's friksjonsfaktor*.

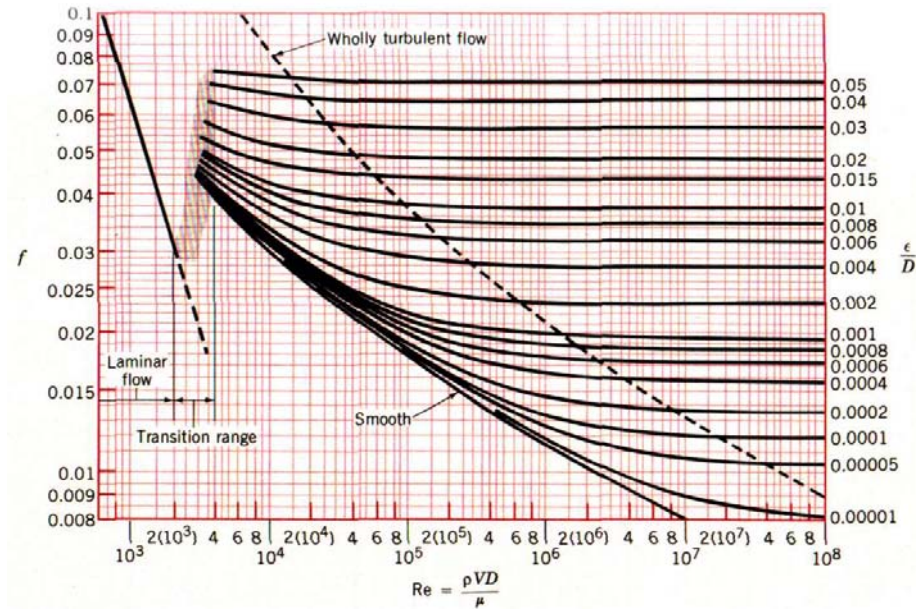
Friksjonskoeffisienten f_F må bestemmes fra mer avansert teori og eksperimenter, og i 1944 presenterte L.W. Moody det berømte diagrammet som nå kalles et *Moody diagram*, se fig. 3.

En stilisert utgave av diagrammet pryder forsiden på [3]. Diagrammet og interaktiv kode for å beregne f_F fins i utallige versjoner på *Internett*. For spesielt interesserte kan vi nevne at for helt lave Reynolds-tall ($Re < 2000$) er strømmingen laminær. Dette er Hagen-Poiseuille strømning med et parabolisk hastighetsprofil over et sirkulært rørtverrsnitt. For en slik strømning kan en vise at $P = 32L\mu v/D^2$, det vil si $f_F = 16/Re$. For resten av diagrammet finnes det mer eller mindre empiriske uttrykk. Når $Re > 6000$ er

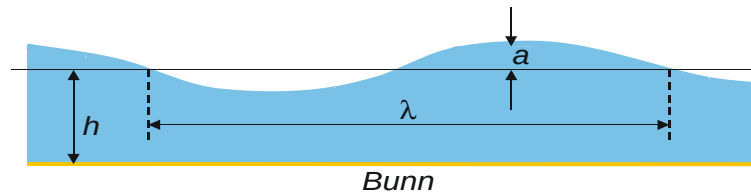
$$f_F = \max(f_C, f_N),\tag{39}$$

der f_C er løsningen av *Colebrook's ligning*

$$\frac{1}{f_C^{1/2}} = -1.74 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7} + \frac{1.25}{Re \times f_C^{1/2}} \right),\tag{40}$$



Figur 3: Moody-diagram, kopiert fra Munson, Young og Okiishi (1990).



Figur 4: Bølger på en vannoverflate.

og f_N er gitt ved *Nikuradse's relasjon* for fullt utviklet turbulent strømming,

$$f_N = \frac{4}{(1.14 - 0.87 \log \varepsilon)^2}. \quad (41)$$

I overgangen mellom laminær og turbulent strømming er strømmen ustabil og kan veksle kaotisk mellom å være laminær eller turbulent.

1.3.5 Vannbølger

I én romdimensjon kan vi skrive en regulær bølge på vannoverflaten som

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (42)$$

der a er amplituden, x er romkoordinaten, t er tiden, $k = 2\pi/\lambda$ er bølgetallet, λ er bølgelengden, $\omega = 2\pi/T$ er vinkelfrekvensen og T er bølgeperioden. For vannbølger kan ikke k og ω velges fritt,

	ω^2	k	a	h	g	ρ	T
m	0	-1	1	1	1	-3	0
s	-2	0	0	0	-2	0	-2
kg	0	0	0	0	0	1	1

Tabell 4: Dimensjonsmatrise for dispersjonsrelasjonen

men må tilfredsstille en såkalt *dispersjonsrelasjon*:

$$\omega^2 = f(k, h, a, \dots). \quad (43)$$

Det er naturlig at vinkelfrekvensen ω forekommer i andre potens. Positive og negative frekvenser tilsvarer bølger som beveger seg henholdsvis til høyre og til venstre. Bølger på vann genereres for eksempel av vind og holdes ved like av tyngdekraften. For helt korte bølger ($\lambda = O(1\text{cm})$) vil overflatespenningen sørge for å holde bølgebevegelsen i gang. Overflatespenningen (σ) er karakterisert av en *overflatespennings-koeffisient* T (som ikke må forveksles med perioden) som knytter overflate-krumningen til spenningen. I én dimensjon er uttrykket $\sigma = T\partial^2\eta/\partial x^2$. Enheten for T blir følgelig

$$[T] = \frac{[\sigma]}{[\partial^2\eta/\partial x^2]} = \left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{m}^2} \right) \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}. \quad (44)$$

Siden tyngdekraften er av betydning, må tyngdeakselerasjonen g og vannets tetthet ρ også komme inn. Vi neglisjerer effekten av luftas bevegelse over bølgene. Dermed kommer vi ut med følgende antakelse om dispersjonsrelasjonen:

$$\omega^2 = f(k, a, h, g, \rho, T). \quad (45)$$

Dimensjonsmatrisen er angitt i tabell 4. Vi ser lett at rangen er 3 og følgelig finnes det $7 - 3 = 4$ dimensjonsløse kombinasjoner. Av flere muligheter velger vi $\{k, g, \rho\}$ som kjernevariable. Det er ikke spesielt lurt å bruke ω^2 , siden vi ikke ønsker at ω^2 skal gå inn på høyre side i ligningen. Videre må enten ρ eller T være med siden disse er de eneste størrelsene som inneholder kg. Det er greit å finne 4 dimensjonsløse kombinasjoner

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\omega^2}{kg}, \\ \pi_2 &= ak, \\ \pi_3 &= hk, \\ \pi_4 &= \frac{Tk^2}{\rho g}, \end{aligned} \quad (46)$$

og vi får

$$\omega^2 = gk\Phi(ak, hk, \frac{Tk^2}{\rho g}). \quad (47)$$

Innbakt i den generelle formelen ligger det flere spesialtilfeller.

- Når bølgen har liten amplitude i forhold til bølgelengden, er $ak \ll 1$
- Når dypet er stort i forhold til bølgelengen, er $hk \gg 1$
- Når bølgelengden er mye større enn 1cm, er $\frac{Tk^2}{\rho g} \ll 1$ (følger fra verdien på T)

Hvis alle disse tre forutsetningene er til stede, må vi kunne skrive $\omega^2 \approx gk\Phi(0, \infty, 0)$, og det viser faktisk at det korrekte uttrykket i dette grensetilfellet nettopp er $\omega^2 = gk$. Hvis dypet ikke er så stort, får vi $\omega^2 = gk\Phi(0, hk, 0)$, og her viser en nærmere analyse at

$$\omega^2 = gk \tanh(hk). \quad (48)$$

Hvis dypet er stort, og vi har svært korte bølger, kan en anta at det bare er overflatespenningen som bidrar til at bølgene opprettholdes. Da kunne vi prøvd en forenklet dimensjonsmatrise på formen,

	ω^2	k	T
m	0	-1	0
s	-2	0	-2
kg	0	0	1

(49)

men siden det bare er T som avhenger av "kg", er det umulig å fjerne denne enheten ved hjelp av de to andre parametrene. Dermed trenger vi enda en parameter med "kg" i benevnningen, og eneste mulighet er ρ . Vi overlater til leseren å vise at dette gir oss

$$\omega^2 = C \frac{Tk^3}{\rho}. \quad (50)$$

Også her viser det seg at $C = 1$. Generelt er det mulig å vise med analytiske metoder at for $ak \ll 1$, vil

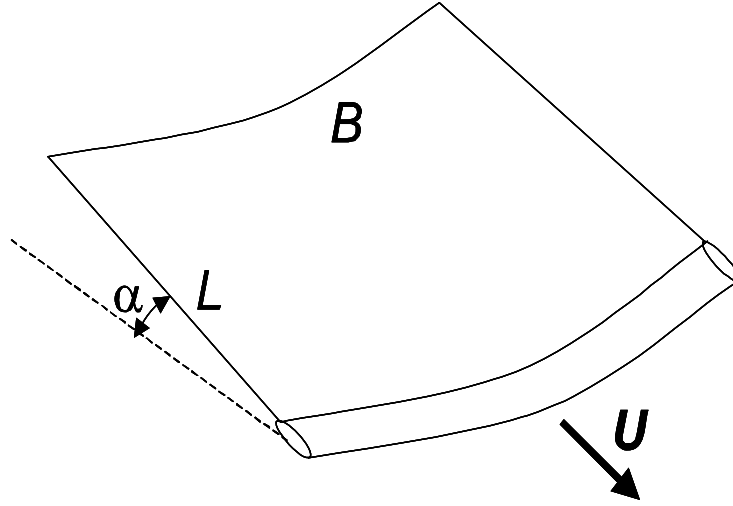
$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \left(1 + \frac{Tk^2}{\rho g} \right). \quad (51)$$

1.3.6 Undersøkelse av papirfly

Anta at vi har fått i oppdrag å optimalisere egenskapene til en klasse papirfly. Disse modellene har gjort det bra under Scientific Americans papirfly-konkurranser, og undersøkelsen vil måtte bli en kombinasjon av eksperiment og teori.

Flyene lages ved at vi tar et papirark av lengde L_0 og bredde B og folder det i små folder fra den ene siden til tyngdepunktet blir liggende ca. 1/4 fra den brettede kanten, som vist på fig. 5. Flyet har da fått lengden L . I stedet for å brette, er det også mulig, hvis en bruker litt stivere papir, å plassere tyngdepunktet riktig ved hjelp av en eller flere binders i forkant på arket. Ideelt skal en slik vinge gli med konstant hastighet U i en fast vinkel α med horisontalplanet. Vår oppgave blir å undersøke hvordan hastigheten avhenger av lengde og bredde, samt flyets vekt. Papirets tetthet pr. flateenhet er ρ_p (kg/m²), luftens tetthet er ρ_a (kg/m³), og luftens viskositet er ν (m²/s).

La oss i første omgang betrakte friksjonskraften F mellom flyet og lufta. Denne kraften må i alle fall være avhengig av størrelsen og hastigheten på flyet, dvs. L , B og U . Videre forventer vi at viskositeten til lufta er av betydning. Hvis vi ser på L , B , U og ν , finner vi at ingen av disse størrelsene inneholder kilo, og siden det kommer inn i kraften, trenger vi ytterligere noen størrelser. Det er naturlig å velge ρ_a , mens det ikke er noen grunn til at ρ_p skal komme inn. Det er også andre parametre som kan forventes å ha litt betydning for friksjonskraften, for eksempel hvor glatt papiret er, hvor tykk bretten er osv., men vi bør ha fått med oss de viktigste.



Figur 5: Skisse av papirflyet omtalt i teksten.

Dimensjonsmatrisen blir som i eksemplene ovenfor

	F	B	L	U	ν	ρ_a
kg	1	0	0	0	0	1
m	1	1	1	1	2	0
s	-2	0	0	-1	-1	-3

(52)

Vi overlater til leseren å vise at dette gir oss 3 dimensjonsløse variable som kan ordnes slik at

$$F = L^2 U^2 \rho_a \Psi \left(\frac{L}{B}, \frac{LU}{\nu} \right). \quad (53)$$

Alternativt kan en skrive

$$F = L B U^2 \rho_a \tilde{\Psi} \left(\frac{L}{B}, \frac{LU}{\nu} \right), \quad (54)$$

og når $B \gg L$, vil det være naturlig å erstatte $\tilde{\Psi} \left(\frac{L}{B}, \frac{LU}{\nu} \right)$ med en funksjon av bare en ukjent, dvs.

$$\Phi \left(\frac{LU}{\nu} \right) = \tilde{\Psi} \left(0, \frac{LU}{\nu} \right). \quad (55)$$

Hvis flyet går med konstant hastighet i en fast vinkel med underlaget, vil friksjonskraften balansere tyngdekraften. Da er altså

$$F = M g \sin \alpha = \rho_p L_0 B \sin \alpha. \quad (56)$$

(I tillegg må det naturligvis være tilstrekkelig løft for at flyet holder seg oppe). For et bredt fly vil dermed hastigheten kunne uttrykkes som

$$U^2 = \frac{\rho_p}{\rho_a} \frac{L_0}{L} g \sin \alpha \Phi \left(\frac{LU}{\nu} \right). \quad (57)$$

Kombinasjonen LU/ν er Reynolds tall, og som vi ser, har enkel dimensjonsanalyse allerede gitt oss mye innsikt som vi kan ta med oss videre i undersøkelsen.

1.4 Oppsummering og kommentarer

I dette kapitlet har vi sett hvordan en med utgangspunkt i to temmelig opplagte aksiomer om naturen kunne utlede *Buckingham's pi-teorem*. Aksiomene er i bunn og grunn en naturlov. Selve teoremet er enkelt å anvende, men forutsetter at det virkelig finnes en relasjon mellom størrelsene vi har satt opp. I praksis er det dette som kan være problematisk å finne ut av.

Hvis vi tar for oss å finne egenfrekvensen ω_0 til en ideell matematisk pendel, skulle en anta at denne er avhengig av lengden på pendelen (L), tyngdens akselerasjon (g), utslagsvinkelen (α) og massen (m). Ut fra dette skulle det da finnes en relasjon

$$\Phi(\omega_0, L, g, \alpha, m) = 0. \quad (58)$$

Her observerer vi imidlertid at dette er umulig, siden massen er den *eneste* størrelsen med kg i benevnningen. Enten må vi sløyfe m , eller så må det finnes en størrelse som vi har glemt. Siden det ser ut til å være umulig å finne andre fornuftige størrelser å trekke inn, er vi nødt til å sløyfe m . Vanlig framgangsmåte gir oss

$$\omega_0 = (g/L)^{1/2} f(\alpha). \quad (59)$$

Dette leder til følgende nyttige observasjon:

Hver fundamentale enhet må inngå i ingen eller minst to av størrelsene!

Hvis ikke dette er oppfylt, har vi enten med for mange eller for få parametre. Svarene i dimensjonsanalysen er aldri entydige. I stedet for å skrive

$$\Psi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{M-r}) = 0 \quad (60)$$

kunne vi brukt

$$\begin{aligned} \pi_1 &= f(\pi_2, \dots, \pi_{M-r}), \\ f(\pi_1, \pi_2) &= g(\pi_3, \dots, \pi_{M-r}), \\ &\vdots \\ &\text{osv.} \end{aligned} \quad (61)$$

Her benytter vi det som er hensiktsmessig. Det er ikke prinsipielt grunnlag for å si at én måte å skrive formelen på er mer riktig enn en annen. I tillegg er naturligvis heller ikke de dimensjonsløse kombinasjonene entydige. Hvis π_1 er dimensjonsløs, er også $\sqrt{\pi_1}$, $1/\pi_1$, π_1^2 , $\pi_1\pi_2$ osv. mulige dimensjonsløse kombinasjoner. Med mer erfaring vil en ofte gjenkjenne kombinasjoner som for eksempel *Reynolds tall* og lignende størrelser.

Kjernevariablene var delmengden av størrelsene som vi brukte til å forme de dimensjonsløse kombinasjonene. Vanligvis er det også her flere muligheter. Hvis vi er interessert i å finne hvordan en størrelse (for eksempel R_1) avhenger av de andre, er det gunstig å unngå å benytte denne som kjernevariabel. Dermed kan vi finne en relasjon på formen $R_1 = \phi(R_2, R_3, \dots, R_M)$, det vil si at R_1 ikke går inn på høyre side.

Vi har behandlet dimensjonsanalysen som en metode til å forenkle relasjoner mellom fysiske størrelser. Dimensjonsanalyse brukes til å skaffe seg oversikt og kan indikere om vi egentlig har forstått hva vi holder på med.

Noe av det beste med dimensjonsanalysen er at den gir oss en formulering som inneholder det minst mulig antall frie variable. Dette vil en sette spesielt pris på når en for eksempel driver med

eksperimentelt arbeid. Hvis vi bestemte oss for å finne egenfrekvensen til en matematisk pendel ved eksperimenter, og gikk ut fra sammenhengen $\omega_0 = \Phi(L, g, \alpha, m)$, måtte vi for å bestemme forløpet av funksjonen Φ kanskje velge 10 ulike verdier for hver variabel, det vil si utføre 10^4 eksperimenter. Hvis vi først benytter dimensjonsanalyse, innser vi at det er nok å benytte bare en pendel, variere utslagsvinkelen α for et rimelig sett av verdier og plotte α mot $\omega_0 (L/g)^{1/2}$ for å bestemme funksjonen $f(\alpha)$.

Tilsvarende forenklinger er det også viktig å gjøre for å spare seg *numeriske eksperimenter på datamaskin*, og før en setter opp eksperimentplaner i statistisk forsøksplanlegging.

Dimensjonsanalyse er også helt fundamentalt innenfor arbeid med skalamodeller. Der ønsker en å gjøre eksperimenter med en modell som gjerne er skalert ned i størrelse. I utgangspunktet ønsker en at de dimensjonsløse kombinasjonene skal være de samme for modellen som for originalen (dette kalles *skalalovene*).

Alle omfattende lærebøker i mekanikk beskriver dimensjonsanalyse. For eksempel har både [3] og [2] greie framstillinger, mens [1] regnes for å være en klassiker.

2 SKALERING

2.1 Innføring av skalerte variable

Etter at vi har satt opp en matematisk modell i form av en ligning, vil det være behov for å føre inn dimensjonsløse variable. Stort sett er det ikke vanskelig å gjøre dette, men det kan alltid gjøres på flere måter, og uten videre kan det være vanskelig å se hva som er mest hensiktsmessig. Det finnes imidlertid en intelligent måte å gjøre dette på som kalles å *skalere ligningene*. Når ligningene er skalert, er det enkelt å se hvilke deler av ligningen som er viktig og hva som er mindre viktig. Det kan være vanskelig å skalere ligninger, og i alle fall vil skaleringen avhenge av problemet vi ser på, selv om ligningen i utgangspunktet er det samme. Noe forenklet kan vi si at skaleringen tvinger oss til å tenke igjennom situasjonen vi er i, og på den måten kan vi få større innsikt i hva vi gjør. Teorien i dette kapitlet er i hovedsak hentet fra [2].

Å skalere en variabel u^ vil si å skrive variabelen som*

$$u^* = Uu \quad (62)$$

der $[U] = [u^]$, U er av samme størrelsesorden som u^* og u er av orden 1.*

U er en *karakteristisk* størrelse på u^* : Hvis vi bruker U som måleenhet, blir u verken spesielt stor eller spesielt liten. Dette er en rimelig upresis definisjon, men den gjenspeiler at skalering i seg selv ikke alltid er så veldefinert.

Til vi blir vant med skalering, er det hendig å ha en notasjon slik at vi skiller mellom de opprinnelige variablene som har enhet, og de nye dimensjonsløse variablene. Dette skal vi gjøre, slik det er foreslått i [2], ved å bruke en $*$ på de opprinnelige variablene, for deretter å sløyfe denne etter at vi har gjort variablene dimensjonsløse (Etter ei stund blir en lei av å skrive $*$, og underforstår overgangen).

La oss betrakte en variabel u^* som er en funksjon av tiden t^* . Det er vanligvis naturlig å bruke

$$U = \max_{t^*} |u^*(t^*)| \quad (63)$$

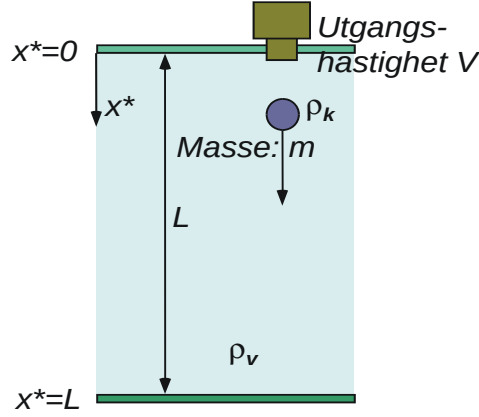
som en skala for u^* . Da vil i alle fall $|u| \leq 1$. I praksis vil det bli snakk om å *anslå* maksimumsverdien, siden vi kanskje ikke kjenner u^* i detalj. Det kan også være behov for en *tidsskala* knyttet til variasjoner av $u^*(t^*)$, og tidsskalaen er et tidsrom over hvilket u^* *varierer signifikant*. Hvis $u^*(t^*) = \sin at^*$, ville en rimelig tidsskala være $1/a$. Ofte er det mulig å finne en rimelig tidsskala ved å se på (eventuelt anslå)

$$\frac{\max |u^*(t^*)|}{\max |du^*/dt^*|}. \quad (64)$$

Slike uttrykk må brukes med fornuft, og når det gjelder skalaer, er det ikke så nøye med faktorer 2, π o.s.v. Skalaer er overslag.

Å skalere en ligning vil si å innføre dimensjonsløse variable basert på skalaene for variablene i ligningen.

Samme ligning vil, avhengig av hvilken situasjon vi er i, kunne skaleres på flere måter. Etter at ligningen er skalert, vil det gå fram hva som er viktige og mindre viktige ledd. Ofte vil en kunne få tilnærmede løsninger ved å løse ligningen etter at mindre viktige ledd er fjernet. Å kjenne skalaene til størrelsene i en matematisk modell krever innsikt og fysisk forståelse, og er noe av det aller viktigste vi gjør innenfor matematisk modellering. Etterhvert vil en se at skalering



Figur 6: Kule som faller/skytes ned i bremsende medium.

er langt fra så enkelt som det høres ut som. Et godt eksempel på dette er et av de sentralene modelleringseksempelene i [2], der forfatterne først flere år etter at boka var kommet ut ble klar over at tidsskalaen de hadde foreslått ikke var helt bra.

I følgende oppkonstruerte og enkle eksempel skal vi se hvordan skaleringene endrer seg alt etter problemets art. Eksemplet er temmelig banalt og kan naturligvis enkelt løses analytisk. Antakelsen om friksjonskraften er ikke spesielt realistisk.

Ei kule skytes loddrett ned i et viskøst medium. Kulas utgangshastighet er V og kreftene som virker på kula er

$$\begin{aligned} \text{Tyngdekraft:} & \quad gm \\ \text{Friksjon:} & \quad -k \frac{dx^*}{dt^*} \\ \text{Oppdrift:} & \quad -gm \frac{\rho_v}{\rho_k} \end{aligned} \quad (65)$$

(Her er ρ_v væskens og ρ_k kulas tetthet). Bevegelsesligningen følger fra Newton's lov og vi antar at kula starter i $x = 0$ med hastighet V :

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = gm - k \frac{dx^*}{dt^*} - mg \frac{\rho_v}{\rho_k}, \quad (66)$$

$$x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V. \quad (67)$$

Vi skal anta at $\rho_v < \rho_k$ slik at kula ikke flyter opp igjen (!), og vi erstatter $g(1 - \frac{\rho_v}{\rho_k})$ med en modifisert g slik at problemet forenkles til

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} &= gm - k \frac{dx^*}{dt^*}, \\ x^*(0) &= 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V. \end{aligned} \quad (68)$$

I dette problemet kan vi tenke oss en rekke spesialtilfeller. Hvis kula hadde falt fritt med null utgangshastighet, ville den ved $x = L$ ha nådd hastigheten v_{FF} der $v_{FF} = \sqrt{2Lg}$. Hvis, på den annen side, mediet er meget viskøst (tenk på sirup!), vil kula stort sett falle med konstant hastighet bestemt av

$$0 = gm - k \frac{dx^*}{dt^*}, \quad (69)$$

det vil si, $v_0 = \frac{gm}{k}$. Nedenfor skal vi betrakte tre ulike situasjoner, og det vil gå fram at forholdet mellom v_{FF} og v_0 er av sentral betydning.

Situasjon A: Friksjonen er stor. Det som skjer i starten har lite å si. Dette er en situasjon der enten L eller viskositeten (her uttrykt i konstanten k) er så stor at kula faller med konstant hastighet over mesteparten av området. Siden kula stort sett har hastigheten v_0 , kan vi anslå tiden det tar for den å falle fra $x = 0$ til $x = L$ til omlag

$$T_0 = \frac{L}{v_0} = \frac{Lk}{mg}, \quad (70)$$

og det gir oss en tidsskala. Avhengig av størrelsen på V , vil den egentlige tiden kula bruker kunne være både større og mindre enn T_0 , men dette tar vi ikke så tungt (Derimot ligger det her en forutsetning om at V ikke er ekstremt stor i forhold til v_0). Lengdeskalaen byr ikke på problemer, vi bruker L og innfører dimensjonsløse variable x og t som

$$\begin{aligned} x^* &= Lx, \\ t^* &= \frac{Lk}{mg}t. \end{aligned} \quad (71)$$

Ved å føre dette inn i ligningene får vi

$$\begin{aligned} m \frac{d^2(Lx)}{d\left(\frac{Lk}{mg}t\right)^2} + k \frac{d(Lx)}{d\left(\frac{Lk}{mg}t\right)} &= gm, \\ Lx(0) = 0, \frac{d(Lx)}{d\left(\frac{Lk}{mg}t\right)}(0) &= V, \end{aligned} \quad (72)$$

som etter å ha blitt ordnet opp, blir

$$\begin{aligned} \frac{gm^2}{Lk^2} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} &= 1, \\ x(0) = 0, \frac{dx}{dt}(0) &= \frac{V}{v_0}. \end{aligned} \quad (73)$$

I tillegg til variablene x og t inneholder problemet to dimensjonsløse parametre:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{gm^2}{Lk^2}, \\ \mu &= V/v_0. \end{aligned} \quad (74)$$

Vi legger merke til at

$$\varepsilon = \frac{gm^2}{Lk^2} = 2 \frac{1}{2Lg} \left(\frac{gm}{k}\right)^2 = 2 \frac{v_0^2}{v_{FF}^2} = 2 \left(\frac{v_0}{v_{FF}}\right)^2, \quad (75)$$

der v_{FF} er hastigheten kula ville fått ved fritt fall uten friksjon. Dermed blir ε en *liten parameter* (i forhold til 1) hvis $v_0 \ll v_{FF}$. Det er nettopp karakteristisk for problemet at hastigheten v_0 er mye mindre enn hastigheten kula ville fått ved $x^* = L$ om den falt fritt.

Det er typisk at når vi har skalert ligningene, har de dimensjonsløse parametrene en tolkning som vi kan bruke til "etterpåklokskap".

Etter at skaleringen er gjennomført, har dermed ligningen formen

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 1, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \mu, \quad \varepsilon = 2 \frac{v_0^2}{v_{FF}^2}, \quad \mu = \frac{V}{v_0}. \quad (76)$$

Som nevnt ovenfor, ligger det her også en forutsetning om at μ ikke er spesielt stor. I så fall kunne en tenke seg andre skaleringer (se for eksempel Situasjon C nedenfor).

Situasjon B: Liten friksjon. Kula faller nesten fritt. V er liten i forhold til v_{FF} . Dette problemet kunne godt vært det samme som i Situasjon A, men med den forskjellen at L nå er så liten at kula aldri kommer opp i en hastighet i nærheten av v_0 . Dermed har friksjonen lite å si.

Igjen er L en naturlig lengdeskala for x^* . Hvis kula falt helt fritt og $V = 0$, ville kula falle med konstant akselerasjon og tiden det tar å falle en lengde L være $\sqrt{2L/g}$. Siden vi allerede har ført inn v_{FF} , benytter vi $T_0 = L/v_{FF}$ som skala. Da blir riktignok T_0 bare halvparten av $\sqrt{2L/g}$, men unøyaktigheter i den størrelsesorden bryr vi oss ikke om. Vi har allerede antatt at hastigheten V er så liten at den ikke påvirker tidsskalaen. Med disse overlegningene skriver vi derfor

$$x^* = Lx, \quad t^* = \frac{L}{v_{FF}}t, \quad (77)$$

og får

$$mL \frac{2Lg}{L^2} \frac{d^2x}{dt^2} + kL \frac{v_{FF}}{L} \frac{dx}{dt} = mg, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \frac{V}{v_{FF}}, \quad (78)$$

eller

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = \mu, \quad \varepsilon = \frac{v_{FF}}{v_0}, \quad \mu = \frac{V}{v_{FF}}. \quad (79)$$

Her blir ε en liten parameter hvis $v_{FF} \ll v_0$, og dette er det karakteristiske for situasjon B. Skaleringen ovenfor er bare naturlig hvis V er liten i forhold til v_{FF} . Hvis V er større enn v_{FF} , men fremdeles mindre enn v_0 , vil L/V være en rimelig tidsskala. Vi overlater til leseren å gjennomføre skaleringen i dette tilfellet.

Situasjon C: Kula skytes ned i et meget viskøst medium. Vi er interessert i starten. I starten forventer vi at friksjonen dominerer over tyngdekraften, og vi anslår lengde- og tidsskalaene ved å se på den tilnærmede ligningen

$$m \frac{d^2x^*}{dt^{*2}} = -kV, \quad x^*(0) = 0, \quad \frac{dx^*}{dt^*}(0) = V. \quad (80)$$

Hvis dette hadde vært den eksakte ligningen, ville kula falt til ro etter en tid $T_0 = \frac{m}{k}$ (siden $\frac{dx^*}{dt^*} = V - \frac{Vk}{m}t^*$). En tilhørende lengdeskala (der vi igjen ser bort fra mulige 2-tall) er

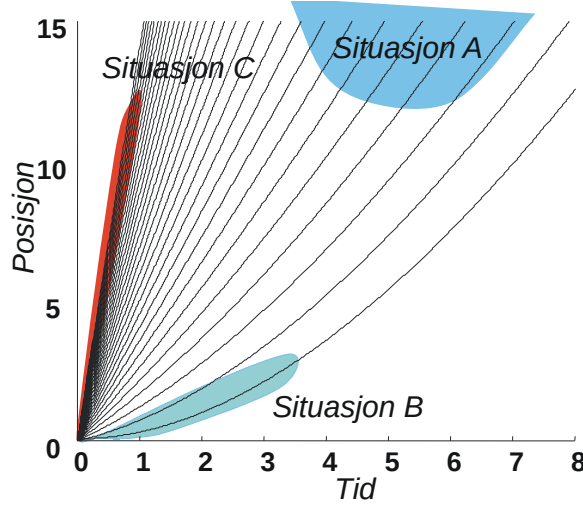
$$VT_0 = \frac{Vm}{k}. \quad (81)$$

Vi setter inn $x^* = \frac{mV}{k}x$ og $t^* = \frac{m}{k}t$:

$$m \frac{mV}{k} \frac{k^2}{m^2} \frac{d^2x}{dt^2} + k \frac{mV}{k} \frac{k}{m} \frac{dx}{dt} = mg, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad (82)$$

	Karakteristisk forhold	Lengde	Tid	Ligning	Parametre
A	$v_0 \ll v_{FF}$	L	L/v_0	$\varepsilon \ddot{x} + \dot{x} = 1$	$\varepsilon = 2\frac{v_0^2}{v_{FF}}, \mu = \frac{V}{v_0}$
B	$v_0 \gg v_{FF}, V < v_{FF}$	L	L/v_{FF}	$2\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} = 1$	$\varepsilon = \frac{v_{FF}}{v_0}, \mu = v/v_{FF}$
C	$V \gg v_0$	mv/k	m/k	$\ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon$	$\varepsilon = \frac{v_0}{v}, \mu = 1$

Tabell 5: Oppsummering av skaleringseksemplet



Figur 7: Figuren viser de eksakte banene og en indikasjon på hvilke situasjoner vi har sett på.

som etter forenkling gir oss

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \varepsilon, \quad x(0) = 0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = 1, \quad \varepsilon = \frac{v_0}{V}. \quad (83)$$

I denne situasjonen er ε en liten parameter når $V \gg v_0$, og dette er igjen karakteristisk for Situasjon C. Vi har nå sett på tre ulike situasjoner der vekten etter tur har blitt lagt på de

ulike leddene i ligningen. I problemet opptrer i tillegg til V to karakteristiske hastigheter, nemlig $v_{FF} = \sqrt{2gL}$ og $v_0 = \frac{gm}{k}$, og de ulike situasjonene ovenfor karakteriseres av den innbyrdes størrelsen på disse hastighetene. Vi oppsummerer resultatene i tabell 5.

I alle tre situasjonene ender vi opp med en parameter " ε " som typisk er liten. De tilhørende leddene i ligningen blir også små, og ved å neglisjere leddene av orden ε , får vi forenklete ligninger.

Selv om det i praksis heller er regelen enn unntaket at vi ender opp med ledd av ulik størrelse, kan det naturligvis også hende at alle leddene i ligningen er av samme størrelsesorden.

Vi overlater til leseren å vise at den eksakte løsningen er

$$x^*(t^*) = \frac{gm}{k}t^* + \left(\frac{gm}{k} - V\right) \frac{m}{k} e^{-t^*/(k/m)}, \quad (84)$$

og grafen på figur 7 viser hvordan de eksakte løsningene forholder seg til situasjonene vi har sett på. Legg merke til at vi på ingen måte har dekket hele diagrammet.

Ved å sette $\varepsilon = 0$ gir alle tre situasjonene ovenfor forenklete ligninger, men situasjon A er

spesiell. Med $\varepsilon = 0$ blir ligningen og startbetingelsene

$$\dot{x}_0 = 1, \quad (85)$$

$$x_0(0) = 0, \quad (86)$$

$$\dot{x}_0(0) = \mu, \quad (87)$$

og med mindre μ er 1, er det *umulig* å løse dette problemet eksakt. Nå er den generelle løsningen til lign. (85)

$$x_0(t) = C + t, \quad (88)$$

og siden hastigheten er 1, dvs. v_0 i de opprinnelige variablene, er formen rimelig. Den tilnærmede løsningen er rett og slett ikke gyldig i nærheten av 0, og det å bestemme riktig $C = C(\mu)$ krever en spesiell teknikk (*singulær perturbasjon*) som vi ikke skal gå nærmere inn på i denne omgang.

I Situasjon B er den tilnærmede ligningen

$$2\ddot{x}_0 = 1,$$

$$x_0(0) = 0, \quad (89)$$

$$\dot{x}_0(0) = \mu,$$

som vi løser umiddelbart,

$$x_0(t) = t^2/4 + \mu t. \quad (90)$$

Vi kan sjekke den tilnærmede løsningen ved å sette inn i den eksakte ligningen,

$$2\ddot{x}_0 + \varepsilon \dot{x}_0 - 1 = \varepsilon \left(\frac{t}{2} + \mu \right). \quad (91)$$

Feilen øker med tiden, og dette er jo rimelig siden den tilnærmede løsning ikke er begrenset av friksjon.

Ligningen i situasjon C har tilnærmet løsning

$$x_0(t) = 1 - e^{-t}, \quad (92)$$

så her vil $x_0(t) < 1$ for alle t .

Selv om løsningene i B og C opplagt har sine svakheter, er de gode for situasjonene de er ment å dekke. Dette kan en overbevise seg om ved å tegne opp tilnærmede og eksakte løsninger for noen valg av ε og μ .

2.2 Skalabetraktninger

Argumentering med utgangspunkt i skalabetraktninger har vist seg å være svært nyttige i mange sammenhenger, men de krever fysisk innsikt og ikke minst kreativitet, og er ikke alltid så lette å utføre.

2.2.1 Turbulens

Væsker blandes (på mikroskopisk nivå) ved *molekylær diffusjon* og (på makroskopisk nivå) ved *konveksjon*. Molekylær diffusjon er knyttet til den kinematiske viskositeten (ν , $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$), mens

konveksjon er makroskopisk bevegelse, typisk *virvler*, som vi ser når vi rører rundt i en kopp eller ser på vannmasser som blandes i ei elv, for eksempel.

La oss si vi betrakter et virvel med lengdeskala L . Tidsskalaen knyttet til L og konveksjon med hastighetsskala U vil være

$$t_K = L/U. \quad (93)$$

Tidsskalaen knyttet til diffusjon over en lengde L må kunne uttrykkes v.hj.a. ν og L . Den eneste muligheten blir

$$t_D = \frac{L^2}{\nu}. \quad (94)$$

Vi observerer at forholdet mellom disse tidsskalaene blir

$$\frac{t_D}{t_K} = \frac{L^2 U}{\nu L} = \frac{LU}{\nu} = Re, \quad (95)$$

som er det velkjente *Reynolds tall*. Hvis $Re \ll 1$, vil fenomenet vi betrakter domineres av molekylær diffusjon, mens $Re \gg 1$ betyr at det domineres av konveksjon.

Verdien på ν for vann er ca. $10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$. For Nidelva er bredden $L = 100\text{m}$ og typisk $U = 1\text{m/s}$. Dermed blir

$$Re \approx \frac{100 \cdot 1}{10^{-6}} = 10^8, \quad (96)$$

og blandingen av vannmasser i elva er *helt dominert av konveksjon*.

I turbulent strømming setter store virvler igang mindre virvler som i sin tur setter igang (og holder ved like) mindre virvler o.s.v. I de helt små virvlene vil viskositeten dempe ut bevegelsen og bevegelsesenergien gå over i varme. Energidissipasjonen skjer i hovedsak fra disse minste virvlene med lengdeskala l' og hastighetsskala u' . Vi kan anslå energitapet (E) pr. tids og masseenhed ved å anta at $E = E(l', u', \nu)$, samt at $E \propto u'^2$ (med andre ord proporsjonal med kinetisk energi som er tilstede i de minste virvlene). Enkel dimensjonsanalyse gir da

$$E \propto \nu \left(\frac{u'}{l'} \right)^2 \quad (97)$$

og et overslag for E blir å si at $E = \nu \left(\frac{u'}{l'} \right)^2$. Ut fra det ovenforstående kan vi videre anta at en for de minste virvlene har $Re \approx 1$, eller $t_K \approx t_D$, d.v.s.

$$\frac{l' u'}{\nu} = 1. \quad (98)$$

Dermed får vi

$$\begin{aligned} l' &= \left(\frac{\nu^3}{E} \right)^{1/4} \\ u' &= (\nu E)^{1/4}. \end{aligned} \quad (99)$$

Disse skalaene kalles *Kolmogorov's mikroskalaer* i turbulensteori og er de minste skalaene som opptrer før diffusjonen overtar.

Hvis vi blander 1 kg vann med en mixer med utgangseffekt på 100W, vil denne effekten forsvinne i de minste virvlene, og følgelig vil diameteren på disse virvlene være av størrelsesorden

$$l' = \left(\left(\frac{10^{-6} \text{m}^2}{\text{s}} \right)^3 / \left(100 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{s} \cdot 1\text{kg}} \right) \right)^{1/4} = 10^{-5} \text{m} = 0.01 \text{mm}. \quad (100)$$

2.2.2 Geometrisk likedannede dyr

Hvorfor ser vi ut som vi gjør? Det har lenge vært kjent at dyrenes form ikke er likegyldig, men et resultat av styrken i muskler og bein i forhold til tyngdekraften her på jorda. Hvis vi kunne forminske et menneske til tommeliten-størrelse, viser det seg at kroppen umiddelbart ville bli slitt i stykker av sine egne muskler. Derfor har insekter gjerne svært beskjedne muskler (tynne bein!) i forhold til størrelsen.

Diskusjonen nedenfor er hentet fra notatet *Dimensjonsanalyse* av Kristian B. Dysthe, Univ. i Tromsø, 1992.

Vi skal først se på dyr som er omlag geometrisk likedannende og har en typisk lengdeskala L . Da vil

1. vekten $\propto L^3$
2. muskelstyrken $\propto$ muskelfibre $\propto$ musklenes tverrsnittsareal $\propto L^2$
3. evnen til å utføre arbeid (og produsere varme), effekt $\propto$ lungekapasitet $\propto$ oksygenopptak $\propto$ overflaten på lungene $\propto L^2$ (kan være noe tvilsom på grunn av lungenes fraktale struktur)

Hopp. Når et dyr tar sats og hopper, vil det tilføres en energimengde som er lengden på satsen, $\mathcal{O}(L)$, multiplisert med kraften som det bruker, $\mathcal{O}(L^2)$. Med andre ord, tilført energi = kraft $\times$ vei $\propto L^2 \times L = L^3$. Nødvendig potensiell energi for et hopp til høyde H vil på samme måte være $H = Hmg \propto HL^3$, der m er massen til dyret. Dette gir følgende

$$HL^3 = \text{konst.} \cdot L^3, \quad (101)$$

eller at H er konstant. Dermed får vi det noe overraskende resultatet at *alle likedannede dyr hopper like høyt!*

På samme måte bør det også bli å hoppe nedover og *lande på en kontrollert måte*. Kattedyr ser jo som kjent ut til å ha denne egenskapen, og ellers påstås det at *kenguru* og *springmus* (som ut fra navnet skulle ha noe forskjellig størrelse!) kan hoppe omtrent like høyt.

Løp i motbakke. Ut fra observasjonen ovenfor er effekten som dyret makter å utføre $\propto L^2$, og siden nødvendig effekt for å opprettholde en hastighet v er

$$(mg \sin \alpha) \cdot v \propto L^3 v, \quad (102)$$

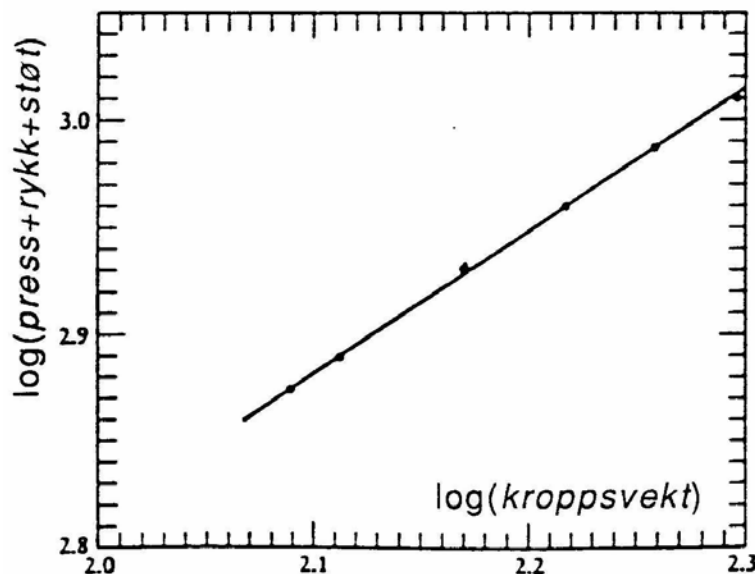
får vi

$$v L^3 = \text{konst.} \times L^2, \quad (103)$$

eller

$$v \propto 1/L. \quad (104)$$

Små dyr kan følgelig holde høyere jevn fart enn store dyr i motbakker.



Figur 8: Verdensrekordene i press+rykk+støt som funksjon av løfternes kroppsvekt. Merk at linjen har stigning $2/3$ (Opphavet til figuren er ukjent).

Dyr som dykker. Anta at alle dyrene beveger seg med hastighet v . Friksjonskraften som må overkommes vil typisk være proporsjonal med kvadratet av hastigheten og tverrsnittsarealet til dyret, dvs. $F \propto v^2 L^2$ (Dette er basert på delvis empiriske formler som utledes med utgangspunkt i dimensjonsanalyse). Totalt forbrukt energi under vannet er $F \cdot v \cdot t_{\max}$, der $t_{\max}$ betegner den maksimale tiden det kan oppholde seg under vann. Siden lagret energi i dyret er $\propto L^3$, blir

$$L^2 \cdot t_{\max} \propto L^3, \quad (105)$$

eller

$$t_{\max} \propto L. \quad (106)$$

Dette betyr med andre ord at store dyr kan være lengre under vann enn små dyr, og dette kjenner vi fra sjøpattedyrene.

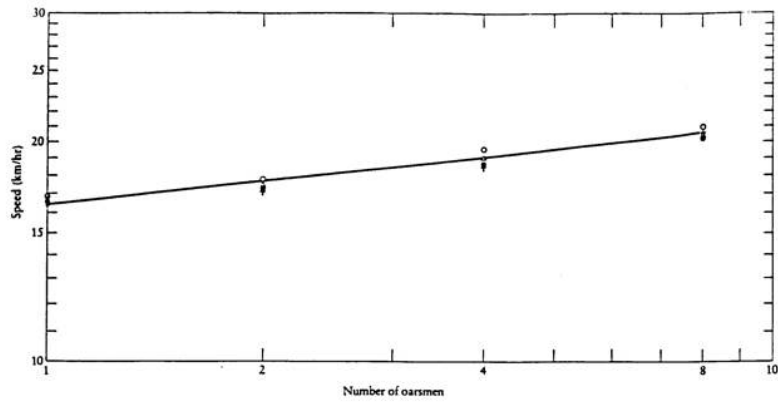
Vi overlater til leseren å trekke argumentene lenger, og for eksempel filosofere over hvordan Mars- og Jupiter-beboerne ser ut...

Til slutt skal vi ta for oss to eksempler fra idretten.

Vektløfting. For vektløftere vil muskelstyrken $\propto L^2$. Videre er vekten $\propto L^3$. Med andre ord bør styrken være proporsjonal med vekten i potensen $2/3$. Figur 8 viser at dette holder forbløffende godt.

Roing. Vi betrakter båter med samme form og typisk lengde l . Nødvendig tilført effekt (på grunn av friksjon og bølgemotstand, såkalt *drag*) for å opprettholde $v_{\max}$ hastighet, blir som for dykkende dyr

$$v_{\max} \cdot F \propto v_{\max}^3 l^2. \quad (107)$$



Figur 9: Hastighet som funksjon av antall roere. Linja har stigning $1/9$. Opprinnelse til grafen er ukjent.

Den tilgjengelige effekten er proporsjonal med antall roere, N . Fortrengt væskemengde av båten er proporsjonal med N eller også l^3 . Dermed blir

$$l \propto N^{1/3}. \quad (108)$$

og vi får

$$v_{\max}^3 l^2 \propto N, \quad (109)$$

eller

$$v_{\max} \propto N^{1/9}. \quad (110)$$

Det er overraskende at hastigheten øker så langsomt med antall roere, men figuren 9 viser at det ser ut til å være tilfelle.

3 REGULÆR PERTURBASJON

I avsnittet om skalering møtte vi begrepet regulær perturbasjon, og her skal vi komme litt nærmere inn på denne metodikken, samt vise hvordan den virker på noen eksempler. Regulær perturbasjon er en av det mest vanlige teknikkene i tradisjonell anvendt matematikk, og er godt behandlet i en rekke bøker. Framstillingen nedenfor er derfor høyst ufullstendig, men mengden er tilpasset det vi kommer til å ha bruk for.

Vi har et *regulært perturbasjonsproblem* hvis vi har ei ligning

$$D(x, \dots, \varepsilon) = 0, \quad (111)$$

som inneholder en parameter ε slik at den fulle løsningen, $x_{sol}(\dots, \varepsilon)$, går mot løsningen x_0 av den reduserte ligningen

$$D(x, \dots, 0) = 0, \quad (112)$$

når ε går mot 0. Utsagnet er litt upresist, for eksempel sier vi ikke noe om hvordan x_{sol} skal gå mot x_0 . Men ideén er nå at hvis vi vet at ε er liten (etter at ligningen er skalert), kan vi kanskje approksimere den komplette løsningen x_{sol} med x_0 . Dette forfølges videre ved å skrive løsningen i form av ei potensrekke i ε ,

$$x_{sol} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots, \quad (113)$$

for deretter å komme opp med separate enklere ligninger for $x_0, x_1, \dots$. Siden ε er liten, forventer vi at leddene i rekken blir mindre og mindre, og at tilnærmelsen blir bedre jo flere ledd vi tar med. I praksis er det ikke fullt så enkelt. Løsningen av ligningene for x_i blir gjerne mer komplisert etterhvert som i øker, og potensrekker har normalt ikke så imponerende konvergenssegenskaper.

Hvis vi glemmer disse innsigelsene, er metoden med regulær perturbasjon enkel å sette opp:

1. Skriv løsningen som ei potensrekke i ε ,

$$x_{sol} = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots \quad (114)$$

2. Sett denne rekken inn i ligningen og rydd opp slik at en får ei *ny* potensrekke i ε ,

$$\begin{aligned} D(x_{sol}, \varepsilon) &= D(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots, \varepsilon), \\ &= P(x_0, 0) + P_1(x_0, x_1)\varepsilon + P_2(x_0, x_1, x_2)\varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \quad (115)$$

3. Sett hver koeffisient i rekken lik 0 og løs ligningene som en da får *rekursivt*:

$$\begin{aligned} P_0(x_0, 0) &= D(x_0, 0) = 0, \\ P_1(x_0, x_1) &= 0, \\ P_2(x_0, x_1, x_2) &= 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (116)$$

Metoden bestemmer $x_0, x_1, x_2, \dots$, og ideén kan benyttes i mange sammenhenger:

1. For tilnærmede løsninger til algebraiske og transcendent ligninger

2. For tilnærmede uttrykk for integraler
3. For ordinære og partielle diff.ligninger

Perturbasjonsanalyse er ofte komplementær til numeriske teknikker. I mange situasjoner vil numeriske metoder ha problemer når ε er liten (dette er spesielt tilfellet for *singulær* perturbasjon). Perturbasjonsanalysen gir oss også asymptotiske sammenhenger som er nyttige når ε går mot 0, i motsetning til et lite antall numeriske beregninger der vi trenger å holde ε fast for hver beregning. I andre sammenhenger er det ingen utpreget liten (eller stor) parameter å benytte, og det er ingen vei utenom numeriske beregninger.

Perturbasjonsregning hadde nok sin storhetstid før vi fikk datamaskiner med muligheter for storskala numeriske beregninger. Spesielt innenfor aerodynamikk har feltet hatt stor anerkjennelse. I dag har vi imidlertid også dataprogrammer for symbolmanipulasjon som gjør oss i stand til å finne perturbasjonsløsninger til ordener vi før bare kunne drømme om. Det har imidlertid vist seg at fortjenesten ofte er marginal. Hvis en ikke oppnår rimelige tilnærmelser med ett eller to ledd i rekken, er det vanligvis lite å hente på å beregne flere ledd.

3.1 Prosjektilproblemet

Prosjektilproblemet, som er diskutert i Lin & Segel, pp. 233, er et enkelt og instruktivt eksempel på hvordan regulær perturbasjon virker. Problemet leder til en ikke-lineær diff.ligning der en ikke kan skrive løsningen på eksplisitt form ved hjelp av elementære funksjoner.

3.1.1 Modell

Et prosjektil sendes vertikalt opp fra en planet uten atmosfære. Bevegelsen beskrives av posisjonen $x^*(t^*)$, hvor t^* er tiden og

$$\begin{aligned} x^*(0) &= 0, \\ \frac{dx^*}{dt^*}(0) &= V. \end{aligned} \tag{117}$$

Prosjektilet vil være påvirket av en kraft som er gitt av Newtons gravitasjonslov,

$$F(x^*) = -G \frac{Mm}{(R + x^*)^2}, \tag{118}$$

hvor G er gravitasjonskonstanten, M er planetens masse, R planetens radius og m prosjektillets masse. Som vanlig setter vi kraften ved overflaten $F(0) = -mg$, slik at $g = GM/R^2$. Dermed får vi

$$m \frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -\frac{R^2 g m}{(R + x^*)^2}. \tag{119}$$

Den matematiske modellen består dermed av den ikke-lineære diff. ligningen

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -\frac{R^2 g}{(R + x^*)^2}, \tag{120}$$

og startbetingelsene i ligning 117.

3.1.2 Skalering

Vi skal betrakte en situasjon der V er liten i forhold til planetens unnslippingshastighet ($\approx 11.2 \text{ km/s}$ for jorda), slik at vi kan anta at $x^* \ll R$ for hele bevegelsen. Under denne forutsetningen vil

$$\frac{d^2 x^*}{dt^{*2}} = -\frac{R^2 g}{(R + x^*)^2} = -\frac{g}{(1 + x^*/R)^2} \approx -g. \quad (121)$$

Denne forenklete ligningen er enkel å løse:

$$x^*(t^*) \approx -\frac{1}{2}gt^{*2} + Vt^*. \quad (122)$$

Spesielt finner vi at den tilnærmede maksimale høyden følger fra lign. 122 ved å observere at tiden til maksimum er tilnærmet gitt av

$$\frac{dx^*}{dt^*} \approx -gt^* + V = 0, \quad (123)$$

eller

$$t_{\max} \approx \frac{V}{g}. \quad (124)$$

Dermed blir

$$x_{\max} \approx -\frac{1}{2}g \left(\frac{V}{g}\right)^2 + V \left(\frac{V}{g}\right) = \frac{1}{2} \frac{V^2}{g}. \quad (125)$$

Passende skalaer, hvor vi ikke bryr oss om en faktor 2, blir følgelig

$$X = \frac{V^2}{g}, \quad T = \frac{V}{g}. \quad (126)$$

Dette fører vi inn ligningen og startbetingelsene

$$\frac{d^2 \left(\frac{V^2}{g}x\right)}{d\left(\frac{V}{g}t\right)^2} = -\frac{R^2 g}{\left(R + \frac{V^2}{g}x\right)^2}, \quad (127)$$

$$\frac{V^2}{g}x(0) = 0, \quad \frac{d\left(\frac{V^2}{g}x\right)}{d\left(\frac{V}{g}t\right)} = V. \quad (128)$$

Etter å ha forkortet, ender vi opp med

$$\ddot{x} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \varepsilon = \frac{V^2}{Rg}. \quad (129)$$

Det viser seg at det ikke er mulig å uttrykke $x = x(t, \varepsilon)$ ved hjelp av elementære funksjoner (dette er ikke helt opplagt!). Siden parameteren ε er omlag $2x_{\max}/R$, er den virkelig liten under forutsetningen vi gjorde ovenfor.

3.1.3 Løsning ved hjelp av regulær perturbasjon

Vi skal løse ligning 129 ved hjelp av regulær perturbasjon i følge oppskriften vi satte opp, og starter med å føre

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (130)$$

inn i ligningen:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_0 + \varepsilon \ddot{x}_1 + \varepsilon^2 \ddot{x}_2 + \dots = -(1 + \varepsilon x)^{-2} \\ &= - \left[1 + (-2)\varepsilon x + \frac{(-2)(-3)}{2}(\varepsilon x)^2 + \dots \right] \\ &= -1 + 2\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) - 3\varepsilon^2 x_0^2 + \dots \\ &= -1 + \varepsilon 2x_0 + \varepsilon^2(2x_1 - 3x_0^2) + \dots \end{aligned} \quad (131)$$

Ved å samle koeffisientene foran hver potens i ε , finner vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 &= -1, \\ \ddot{x}_1 &= 2x_0, \\ \ddot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_0^2 \\ \ddot{x}_3 &= 2x_2 + 2x_0x_1 - 2x_0(2x_1 + x_0^2) - 2(2x_1 - 3x_0^2)x_0 \\ &\dots \end{aligned} \quad (132)$$

For å finne siste ligning må rekkeutviklingen i lign. 131 bringes et steg lenger enn angitt ovenfor.

Vi må også bestemme hva vi gjør med startbetingelsene, men her er det greit nok å bruke

$$\begin{aligned} x_0(0) &= 0, \quad \dot{x}_0(0) = 1, \\ x_1(0) &= 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \\ x_2(0) &= 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0, \\ &\dots \end{aligned} \quad (133)$$

Dermed tar x_0 vare på startbetingelsene, som følgelig blir oppfylt uansett når vi stopper rekkeutviklingen.

Løsningen for x_0 følger umiddelbart fra ligningen 132:

$$x_0(t) = t - \frac{1}{2}t^2, \quad (134)$$

og ved å sette dette inn i neste ligning i 132, finner vi

$$\ddot{x}_1 = 2x_0 = 2 \left(t - \frac{1}{2}t^2 \right), \quad (135)$$

eller

$$x_1(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4. \quad (136)$$

Legg merke til at bare partikulærløsningene endres for hvert steg og at bidraget fra homogenløsningene forsvinner for x_i når $i \geq 1$.

Det er vanlig at algebraen raskt blir relativt komplisert, men i dag kan vi gjøre oss god nytte av programpakker for symbolsk manipulasjon, for eksempel *Maple*, *Mathematica* eller *Derive* (*Maple* ble brukt her):

$$x(t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (137)$$

Fra denne løsningen finner vi også en mer nøyaktig ligning for tilnærmet tid opp til maksimum,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(t - \frac{1}{2}t^2 + \varepsilon \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{12}t^4 \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{4}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{11}{360}t^6 \right) \right) \\ = 1 - t + \varepsilon t^2 - \frac{1}{3}\varepsilon t^3 - \varepsilon^2 t^3 + \frac{11}{12}\varepsilon^2 t^4 - \frac{11}{60}\varepsilon^2 t^5 = 0 \end{aligned} \quad (138)$$

Dette er ei femte-gradsligning, men siden vi forventer at løsningen t_m er i nærheten av 1, kan vi jo i tråd med det foregående prøve en perturbasjonsutvikling,

$$t_m = 1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (139)$$

Ved å sette dette inn i lign. 138, finner vi

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2) + \varepsilon (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^2 - \frac{1}{3}\varepsilon (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^3 - \varepsilon^2 (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^3 + \\ &+ \frac{11}{12}\varepsilon^2 (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^4 - \frac{11}{60}\varepsilon^2 (1 + a\varepsilon + b\varepsilon^2)^5 + \dots \\ &= \left(-a + \frac{2}{3} \right) \varepsilon + \left(a - \frac{4}{15} - b \right) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (140)$$

Dette gir til $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = a - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}, \quad (141)$$

og

$$t_m = 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (142)$$

Det er rimelig at tiden det tar opp til maksimum øker fra 1, siden gravitasjonen som virker på prosjektilet blir svakere etterhvert som det stiger.

Figuren 10 viser noen numeriske løsninger laget vha. MatlabTM.

Perturbasjonsløsningen til nullte, første og andre orden er sammenlignet med den numeriske løsningen på fugurene 11 og 12.

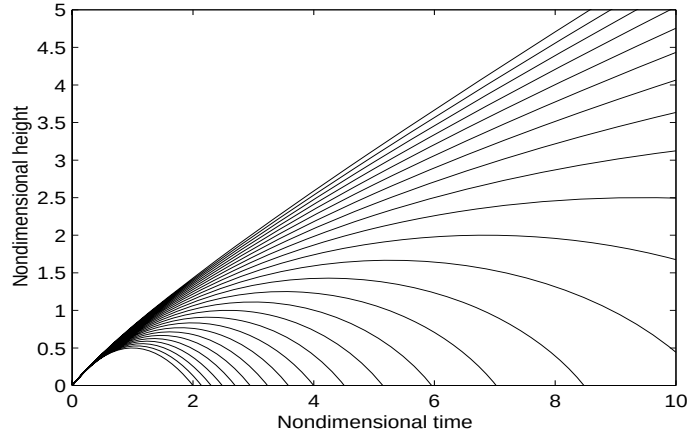
3.1.4 Analytisk løsning

Som bemerket ovenfor, er det ikke mulig å skrive løsningen av

$$\ddot{x} = -\frac{1}{(1 + \varepsilon x)^2}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad (143)$$

på lukket form ved hjelp av elementære funksjoner. Nå er det imidlertid enkelt å komme et stykke på vei. Etter å ha multiplisert ligningen med $\dot{x}$ finner vi

$$\frac{d}{dt} (\dot{x}^2/2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \varepsilon x} \right), \quad (144)$$



Figur 10: Numeriske løsninger vist for $\varepsilon = 0$ (0.1) 3. Når $\varepsilon \geq 2$, vender prosjektilet aldri tilbake til $x = 0$ (se nedenfor).

eller

$$\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{1 + \varepsilon x} = \text{konstant.} \quad (145)$$

Dette forteller oss at bevegelsen er *konserverativ*, slik at summen av potensiell og kinetisk energi er konstant. Ved å sette inn $x(0) = 0$ og $\dot{x}(0) = 1$, ser vi at konstanten er lik $1/2 - 1/\varepsilon$. Dette leder til en ikke-lineær første ordens ligning:

$$\dot{x}^2 = \frac{1 + (\varepsilon - 2)x}{1 + \varepsilon x}, \quad x(0) = 0. \quad (146)$$

Hvis $\varepsilon < 2$, vil $\dot{x}$ være lik 0 for

$$x_{\max} = \frac{1}{2 - \varepsilon}. \quad (147)$$

Dette blir altså det *eksakte* uttrykket for maksimum høyde for prosjektilet når $\varepsilon < 2$. Hvis $\varepsilon > 2$, vil hastigheten alltid forbli større enn 0 og prosjektilet fortsetter til universets grenser. Merk at for jorda vil $\varepsilon = 2$ bety at

$$V = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \times \frac{40000000}{2\pi} \times 9.81} \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 11.17 \text{ km/s}, \quad (148)$$

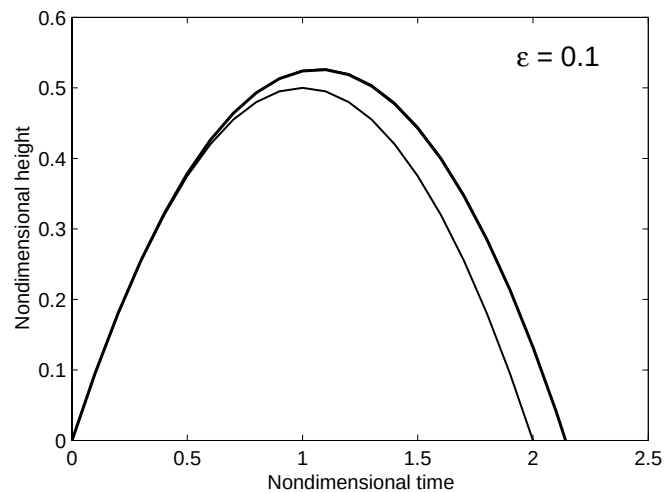
som altså er unnslippingshastigheten.

Ved separasjon, og så lenge $\dot{x} \geq 0$, kan vi skrive løsningen av ligning 146, implisitt som

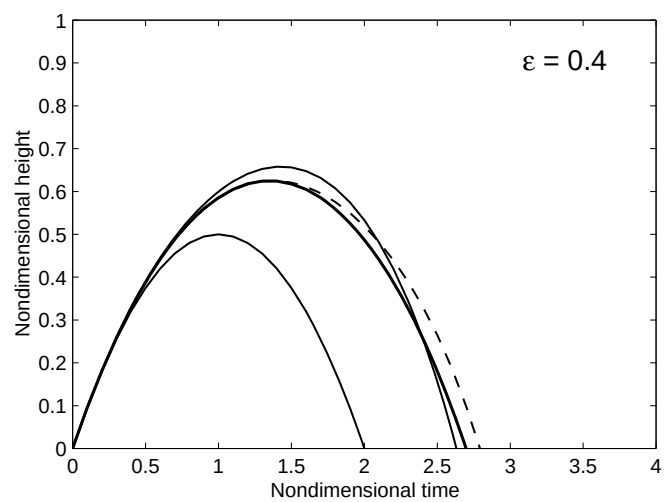
$$t = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + \varepsilon s}{1 + (\varepsilon - 2)s}} ds. \quad (149)$$

Dette integralet er løsbart:

$$\int \sqrt{\frac{a+s}{b-s}} ds = \frac{a+b}{2} \arcsin\left(\frac{2s+a-b}{a+b}\right) - \sqrt{(a+s)(b-s)} + C = F(s, a, b) + C \quad (150)$$



Figur 11: Numerisk løsning og perturbasjonsløsninger for $\varepsilon = 0.1$. Den numeriske løsningen (tykk strek) og perturbasjonsløsningene til første og andre orden faller sammen på grafen. Løsningen for x_0 (tynn strek) avviker imidlertid.



Figur 12: Som forrige figur for $\varepsilon = 0.4$. Numerisk løsning: tykk kurve; x_0 og $x_0 + \varepsilon x_1$: tynn kurve; $x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2$: stiplet kurve.

Dermed finner vi

$$\begin{aligned} t &= \int_0^x \sqrt{\frac{1+\varepsilon s}{1-(2-\varepsilon)s}} ds = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \int_0^x \sqrt{\frac{1/\varepsilon + \varepsilon s}{1/(2-\varepsilon) - s}} ds \\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}} \left[F\left(x, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon}\right) - F\left(0, \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon}\right) \right] \end{aligned} \quad (151)$$

Siden vi allerede vet at

$$x_{\max} = \frac{1}{2-\varepsilon} \quad (152)$$

når $\varepsilon < 2$, finner vi i dette tilfelle også et eksakt uttrykk for t_m :

$$\begin{aligned} t_m &= \int_{s=0}^{1/(2-\varepsilon)} \sqrt{\frac{1+\varepsilon s}{1-(2-\varepsilon)s}} ds = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon) + \sqrt{(2-\varepsilon)\varepsilon}}{(2-\varepsilon)^{3/2}\varepsilon^{1/2}} \\ &= 1 + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \frac{8}{35}\varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (153)$$

Starten på potensrekken stemmer med det vi fant i ligning 142.

3.2 Florence Griffith Joyner og verdensrekorden på 100m

Florence Griffith Joyner, "Flo-Jo" (1959–98) var en amerikansk friidrettsstjerne som fremdeles (når dette skrives) er innehaver av den offisielle verdensrekorden på 100m, 10.49s. Rekorden ble satt under et kvalifiseringsheat til OL i Seoul, 1988. Vindmåleren registrerte 0 m/s, mens mange hevdet at det var betydelig medvind, anslått til omlag 4 m/s, og at måleren ikke virket. I resten av løpene i kvalifiseringen løp hun på tider omkring 10.7.

En sprinter drives fram av den fraskyvningskraften hun/han er i stand til å produsere. Denne kraften kan skrives Mp^* , der M er sprinterens masse og p^* er en parameter med benevnelse akselerasjon. Maksimal kapasitet blir dermed MP , der P er den maksimale akselerasjonen løperen er i stand til å produsere.

I tillegg er det to krefter som bremser sprinteren: luftmotstand og "indre motstand". Den indre motstanden, som representerer motstand i muskler og ledd, antas å kunne skrives på formen Mu^*/τ , der u^* er løperens hastighet og τ er en karakteristisk tidskonstant. Målinger på ulike løpere, blant annet Ben Johnson og Carl Lewis, har gitt $P \approx 10m/s^2$ og $\tau \approx 1s$, og vi skal bruke disse verdiene nedenfor.

Med utgangspunkt i Newtons andre lov, kan vi skrive bevegelsesligningen for sprinteren

$$M \frac{du^*}{dt^*} = Mp^*(t^*) - M \frac{u^*}{\tau} - F_l, \quad (154)$$

der F_l representerer luftmotstanden. Formen på uttrykket for luftmotstanden kan finnes ved hjelp av dimensjonsanalyse. Det er rimelig å anta at F_l avhenger av luftens tetthet, ρ_l , kinematisk viskositet ν , samt løperens hastighet u^* og tverrsnittsareal A i fartsretningen. I tillegg trengs en lengdeskala L , der vi bruker $\sqrt{A}$. Det overlates til leseren å vise ved hjelp av dimensjonsanalyse at vi skrive

$$F_l = \frac{1}{2} \rho_{luft} C_D (\text{Re}) A u^{*2}, \quad (155)$$

der C_D er den såkalte dragkoeffisienten som avhenger av *Reynolds tall*, $\text{Re} = \frac{\sqrt{A}u^*}{\nu}$.

Siden vi allerede vet at τ er en typisk tidskonstant, er det rimelig å benytte denne som tidsskala. Vi kjenner videre den maksimale akselerasjonen, P , slik at dette blir en naturlig skala for akselerasjonen. Dermed kan vi skalere hastigheten ved hjelp av $P\tau$. Dersom vi setter dette inn i ligning 154, følger det at

$$\dot{u}(t) + u(t) + \varepsilon u(t)^2 = p(t), \quad (156)$$

der

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\rho_l C_D \tau^2 P \frac{A}{M}. \quad (157)$$

Nå er C_D selv avhengig av hastigheten, men målinger av luftmotstand for uregelmessige legemer har vist at C_D er tilnærmet konstant for $2 \times 10^4 < \text{Re} < 10^6$, som omfatter i hovedsak det vi møter her. Verdien på C_D ligger i nærheten av 1, som vi vil bruke nedenfor. Med P og τ som angitt ovenfor, $A \approx 0.45\text{m}^2$ og $\rho_{\text{luft}} \approx 1.2\text{kg/m}^3$, blir ε dermed omlag 0.035 for en utøver som veier 70 – 80 kg. Siden $|u| \leq 1$, konkluderer vi med at luftmotstanden har relativt lite å si.

For å løse (156) ved hjelp av regulær perturbasjon, skriver vi $u(t) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ og setter dette inn i (156):

$$\dot{u}_0 + \varepsilon \dot{u}_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) + \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^2 = p. \quad (158)$$

Vi samler alle ledd av lik orden i ε og bruker $u(0) = 0$, som initialbetingelse. Dette gir oss en rekke første ordens ligninger:

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 + u_0 &= p, \quad u_0(0) = 0, \\ \dot{u}_1 + u_1 &= -u_0^2, \quad u_1(0) = 0, \\ \dot{u}_2 + u_2 &= -2u_0 u_1, \quad u_2(0) = 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (159)$$

For å kunne løse ligningene, må vi i tillegg kjenne akselerasjonen $p(t)$. Anta at $p^* = P$, dvs. $p(t) \equiv 1$. De to første leddene i perturbasjonsutviklingen bestemmes dermed av

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 + u_0 &= 1, \quad u_0(0) = 0, \\ \dot{u}_1 + u_1 &= -u_0^2, \quad u_1(0) = 0, \end{aligned} \quad (160)$$

og vi finner enkelt at løsningen gitt som

$$u(t) = 1 - e^{-t} + \varepsilon[-1 + 2te^{-t} + e^{-2t}] + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (161)$$

Vi ser at sprinteren kommer opp i maksimal hastighet ($u_0(t) \approx 1$) omtrent når $t = 3$, dvs. etter $3\tau = 3$ sekunder.

La oss nå anta at vi har vind som blåser parallelt med løpsretningen. Det fører til en modifisert luftmotstand

$$F_l = \frac{1}{2}\rho_l C_D A (u^* - W)^2. \quad (162)$$

Vindhastigheten skaleres tilsvarende som løperens hastighet, slik at i dimensjonsløse størrelser er vinden gitt ved $\delta = W/(\tau P)$.

Vi skal bestemme den maksimale hastigheten U en sprinter kan holde som funksjon av δ til første orden i ε . Maksimal hastighet oppnås når akselerasjonen er null, dvs. gitt av ligningen

$$U + \varepsilon(U - \delta)^2 = 1. \quad (163)$$

Sjekk at løsningen til første orden i ε blir

$$U = 1 - \varepsilon(1 - \delta)^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (164)$$

Vi antar at Florence presterte maksimalt under alle løp og (noe urealistisk) at hun holdt maksimal hastighet under hele løpet. Den maksimale hastigheten uten vind blir $U_0 = 1 - \varepsilon$, mens den blir $U_4 = 1 - 0.36\varepsilon$ med vind på 4m/s, dvs. $\delta = 0.4$. Tiden man bruker er gitt som $T = (100\text{m})/U$, og dermed finner vi

$$T_0/T_4 = (1 - 0.36\varepsilon)/(1 - \varepsilon). \quad (165)$$

For å få en formening om hva dette betyr i tid, må vi finne ”hennes” ε . Vi antar at hun har like stor akselerasjon, tverrsnittsareal og drag koeffisient som det som ovenfor. Vekten hennes, derimot, burde være noe mindre; la oss si 60 kg. Det gir $\varepsilon \approx 0.04$. I tid gir 4 m/s medvind omtrent tiden $10.7 \cdot (1 - 0.04)/(1 - 0.04 \cdot 0.36) = 10.42$ sekunder. Ettersom hun akselererte de første tre sekundene, stemmer dette godt med tiden hun løp på. Nå kan det også bemerkes at hun løp på 10.54s i finalen, men da i medvind over 2m/s.

3.3 Modellering av nyrefunksjon

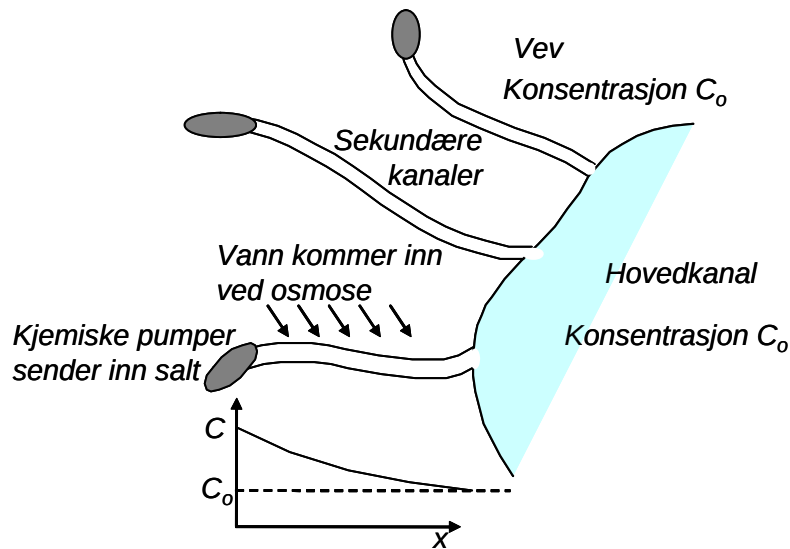
Dette modelleringseksemplet er også inngående behandlet i Lin&Segel, kap. 8. Eksemplet tar for seg hele prosessen med fysisk forståelse, formulering, matematisk modell, skalering og til slutt regulær perturbasjon. I modelleringen møter vi bevarelsesprinsipper som også vil bli sentrale senere i kurset.

Etter observasjoner av nyrevev foreslo *J. Diamond* i 1967 at salt og vann blir utskilt fra nyrene på en indirekte måte ved hjelp av ”sekundære kanaler”. Slike kanaler skal alltid finnes i veggene til hovedkanalene, og det er derfor spekulert på om dette kan forklare hvordan nyrene fungerer. Mekanismen som har blitt foreslått er skissert på figur 13. I den innerste enden av de sekundære kanalene finnes det kjemiske pumper som sender salt inn i kanalen med forbruk av energi. Oppløsningen i kanalen får følgelig høyere saltkonsentrasjon enn vevet omkring og selve hovedkanalen. Dette fører til at kanalen får en gradient i saltkonsentrasjonen mot åpningen. Konsentrasjonsforskjellen mellom kanalen og vevet omkring fører til at vann kommer inn i kanalen gjennom veggene på grunn av osmose. Dette vannet strømmer ut i hovedkanalen og transporterer samtidig saltet ut av kanalen. Under stasjonære forhold får vi en såkalt ”standing gradient”.

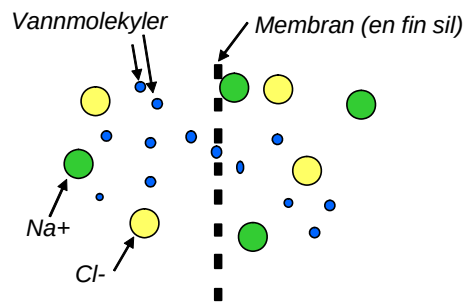
Egentlig transporteres salt i kanalen både ved *diffusjon* og passiv transport med vannstrømmen. Det siste kalles *konveksjon*.

Problemet som vi har fått er å sette opp en matematisk modell for en sekundær kanal og finne ut hvordan saltkonsentrasjonen og vannstrømmen varierer i kanalen, og spesielt hvor effektiv den foreslåtte mekanismen kan være.

I beskrivelsen ovenfor inngikk en del begreper som vi først skal se litt nærmere på.



Figur 13: Skisse av hvordan en tenker seg at nyrene fungerer.

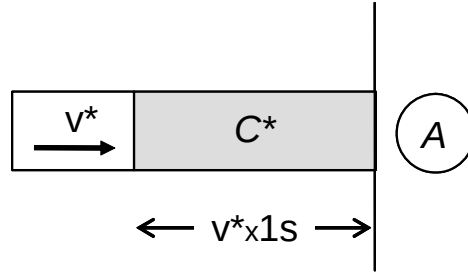


Figur 14: En osmotisk membran i en saltløsning slipper vannmolekyler igjennom, men ikke klor- og natriumioner!

Molekylær *osmose* er en viktig mekanisme i biologiske systemer. Osmose dreier seg om transport gjennom membraner som er så finmaskede at de ikke slipper gjennom store molekyler. I vårt tilfelle modelleres kanalveggen som en osmotisk membran, skissert på fig. 14.

Hvis ionekonsentrasjonen på sidene av membranen er henholdsvis C_1 og C_2 , kan netto mengde av vann som passerer gjennom membranen pr. areal og tidsenhet, J , skrives som

$$J = P(C_2 - C_1). \quad (166)$$



Figur 15: Konvektiv fluks: Saltkonsentrasjonen er C^* og oppløsningen beveger seg med hastighet v^* i x -retningen..

Konstanten P kalles *permeabilitet*. Enhetene til størrelsene i denne ligningen er som følger:

$$\begin{aligned} [J] &= \frac{\text{Volum}}{\text{Areal} \times \text{Tid}} = \frac{\text{m}^3}{\text{m}^2 \text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ [C] &= \frac{\# \text{ ioner}}{\text{Volum}} = \frac{\text{osmol}}{\text{m}^3}, \\ [P] &= \frac{\text{m/s}}{\text{osmol/m}^3} = \frac{\text{m}^4}{\text{osmol} \cdot \text{s}}. \end{aligned} \quad (167)$$

Enheten "osmol" er brukt i Lin&Segel, men er egentlig unødvendig siden antallet ioner for tynne saltløsninger vil være to ganger antall saltmolekyler, og derfor proporsjonalt med saltkonsentrasjonen angitt i kg/m^3 .

Vi skal senere komme tilbake til begrepene *diffusjon* og *fluks*, men enkelt sagt vil transport av oppløst salt i en oppløsning som ellers er i ro i hovedsak skyldes konsentrasjonsdifferanser:

$$F = -D \frac{\partial C}{\partial x}. \quad (168)$$

Her er F kalt *diffusiv fluks* av salt (i x -retningen), og D kalles diffusjonskoeffisienten. Fluks er mengde som passerer gjennom en tenkt flate pr. tid og arealenhet. Enheten for fluks av salt blir følgelig

$$[F] = \frac{\text{Mengde}}{\text{Areal} \times \text{Tid}} = \frac{\text{osmol}}{\text{m}^2 \text{s}}, \quad (169)$$

og siden $[C] = \text{osmol/m}^3$, må

$$[D] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (170)$$

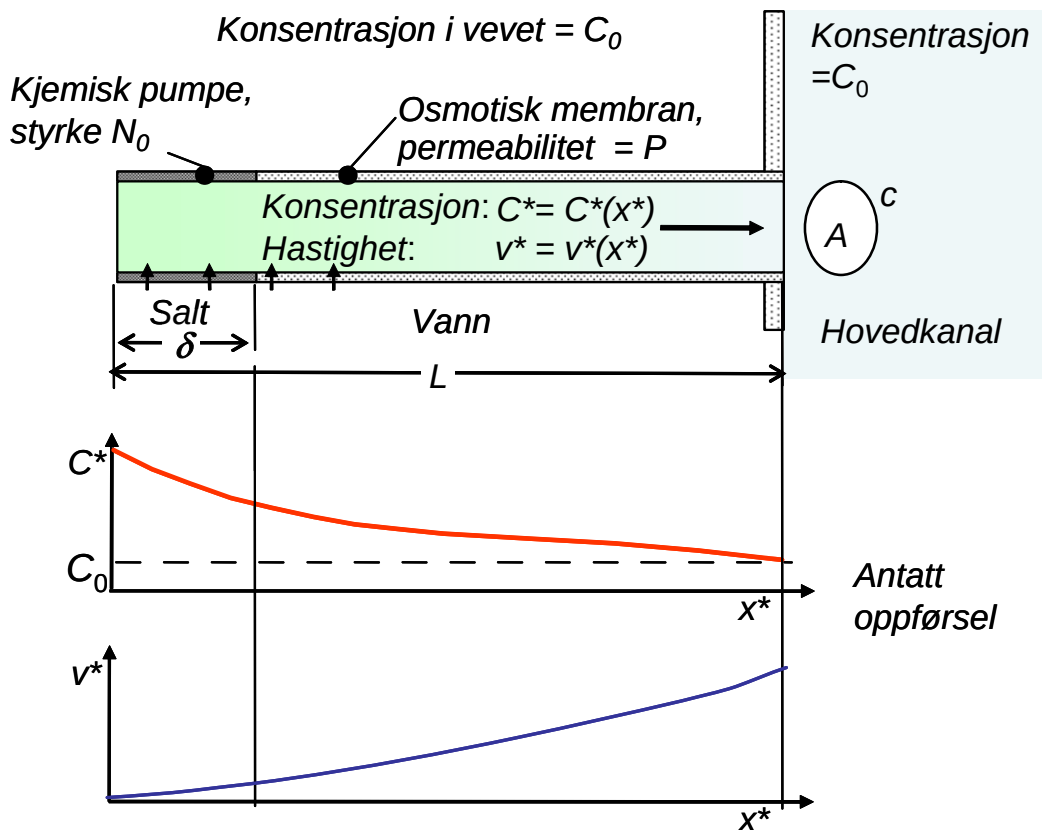
Hvis en saltløsning med konsentrasjon C beveger seg i x -retningen med hastighet V , kan uttrykket for *konvektiv fluks* utledes enkelt ved å betrakte figur 15. I løpet av ett sekund går det skraverte volumet gjennom flaten med areal A .

Uttrykket for fluksen blir følgelig

$$F_{konv} = \frac{V \cdot 1s \cdot A \cdot C}{A \cdot 1s} = VC. \quad (171)$$

Total fluks vil være summen av bidragene (dette behandles mer inngående senere i kurset):

$$F = F_{diff} + F_{konv} = -D \frac{dC}{dx} + VC. \quad (172)$$



Figur 16: Skisse av endimensjonal matematisk modell.

Kjemiske pumper er i stand til å presse salt gjennom vev (ut av kroppen) ved forbruk av energi (det er omtrent hva denne forfatteren vet om den saken). Styrken på en kjemisk pumpe angis ved en størrelse N_0 ,

$$[N_0] = \frac{\text{Mengde ut}}{\text{Veggareal} \times \text{Tid}} = \frac{\text{osmol}}{\text{m}^2 \text{s}} \quad (173)$$

3.3.1 Formulering av matematisk modell

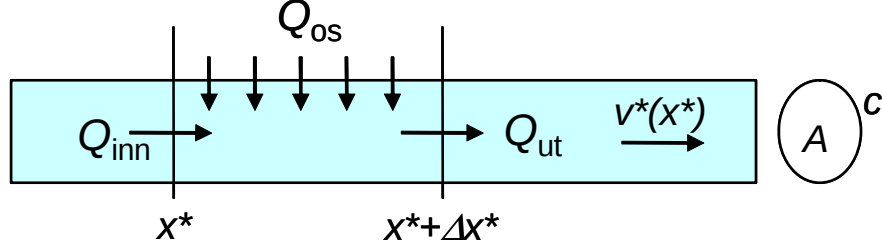
Figur 16 er en skisse av hvordan vi kan tenke oss en en-dimensjonal matematisk modell av kanalen i form av et rett rør med lengde L , tverrsnitt A , omkrets c , og en aktiv sone for de kjemiske pumpene med lengde δ .

Vi trenger å forhøre oss med biomedisinere for å få en formening om størrelsen på variablene vi har ført inn, og det kommer vi tilbake til under skaleringen. Det er imidlertid verdt å merke seg allerede nå at kanalene er tynne (diameteren er bare 0.001 – 0.01 av lengden), slik at det må være nok å tenke seg en en-dimensjonal modell.

Vi lar uskalerte variable få en ekstra "*", som vi fjerner etter skaleringen.

Vannet som kommer inn gjennom vegg (pr. arealenhet) på grunn av osmose må kunne skrives

$$J = P (C^*(x^*) - C_0). \quad (174)$$



Figur 17: Oppstilling av vann-bevarelse for utsnittet mellom x^* og $x^* + \Delta x^*$.

Saltet i kanalen transporteres både ved diffusjon og konveksjon,

$$F^* = F_d + F_c = v^* C^* - D \frac{dC^*}{dx^*}. \quad (175)$$

De kjemiske pumpene sender inn en saltmengde pr. tidsenhet lik $N_0(\delta c)$.

Vi har fått i oppdrag å bestemme såkalt *emergent osmolarity*, Os^* , definert ved $F^*(L) = v^*(L)Os^*$:

$$Os^* = \frac{F^*(L)}{v^*(L)} = \frac{v^*(L)C^*(L) - D \frac{dC^*}{dx^*}(L)}{v^*(L)}. \quad (176)$$

Dette blir den ekvivalente saltkonsentrasjonen som ville gitt samme utstrømning av salt, hvis oppløsningen hadde hastighet v^* og det ikke var noe bidrag fra diffusjon.

Det grunnleggende prinsippet for selve modelleringen er *bevarelse* av salt og vann. Bevarelsen av vann for en bit av kanalen mellom x^* og $x^* + \Delta x^*$ kan illustreres som på figur 17.

Uttrykkene for Q_{inn} og Q_{ut} (vannmengde inn og ut pr. tidsenhet) er enkle:

$$\begin{aligned} Q_{inn} &= Av^*(x^*), \\ Q_{out} &= Av^*(x^* + \Delta x^*) \end{aligned} \quad (177)$$

For Q_{os} må vi kunne skrive

$$Q_{os} = P(C^*(x^* + \tilde{x}^*) - C_0) \cdot (\Delta x^* \cdot c), \quad (178)$$

der $0 \leq \tilde{x}^* \leq \Delta x^*$, og $\Delta x^* \cdot c$ er veggarealet. Siden $Q_{out} - Q_{in} = Q_{os}$, blir

$$Av^*(x^* + \Delta x^*) - Av^*(x^*) = P(C^*(x^* + \tilde{x}^*) - C_0) \cdot (\Delta x^* \cdot c), \quad (179)$$

og ved å dividere med Δx^* og la $\Delta x^* \rightarrow 0$, finner vi en diff.-ligning

$$\frac{dv^*}{dx^*} = \frac{Pc}{A} [C^*(x^*) - C_0]. \quad (180)$$

Bevarelsen for salt kan settes opp like enkelt:

$$\begin{aligned} Q_{ut}^{salt} &= AF^*(x^* + \Delta x^*), \\ Q_{inn}^{salt} &= AF^*(x^*), \\ Q_{k.p.}^{salt} &= N^*(x^*) \cdot (c\Delta x^*), \end{aligned} \quad (181)$$

der $N^*(x^*) = N_0$ når $x^* \leq \delta$, og null ellers. Ved å la $\Delta x^* \rightarrow 0$ utleder vi på samme måte

$$A \frac{dF^*}{dx^*} = \begin{cases} N_0 c, & x^* < \delta, \\ 0 & \delta \leq x^*. \end{cases} \quad (182)$$

Denne enkle ligningen kan løses umiddelbart. For $x^* < \delta$ finner vi, siden $F^*(0) = 0$ (ingen ting kommer inn gjennom endeflaten),

$$F^* = \frac{N_0 c}{A} x^*. \quad (183)$$

For resten av kanalen er fluksen konstant, og følgelig blir, siden fluksen er kontinuerlig for $x^* = \delta$ (tenk over hva det betyr!),

$$F^* = \frac{N_0 c}{A} \delta. \quad (184)$$

Dette gir oss en diff.ligning for C^* :

$$C^* v^* - D \frac{dC^*}{dx^*} = \begin{cases} \frac{N_0 c}{A} x^*, & x^* < \delta, \\ \frac{N_0 c}{A} \delta, & \delta \leq x^*. \end{cases} \quad (185)$$

Sammen med ligning 180 har vi nå fått to ikke-lineære, koblede diff.-ligninger for C^* og v^* . Før vi prøver å løse dem trenger vi å angi randbetingelser for endene av kanalen, samt kontinuitetsbetingelser (også kalt "matching"-betingelser) ved $x^* = \delta$.

Ved $x^* = 0$ er det klart at

$$v^*(0) = 0, \quad F^*(0) = 0. \quad (186)$$

Dette gir forøvrig, fra ligning 185, at $dC^*/dx^*(0) = 0$.

Ved utløpet av kanalen er det rimelig å bruke

$$C^*(L) = C_0. \quad (187)$$

Tilslutt ser vi på vi $x^* = \delta$. Det er klart at både F^* , v^* og C^* må være kontinuerlige (Tenk gjennom det. Diffusjon sørger for at C^* ikke utvikler diskontinuiteter). Dette kan vi skrive

$$\begin{aligned} F^*(\delta+) &= F^*(\delta-), \\ v^*(\delta+) &= v^*(\delta-), \\ C^*(\delta+) &= C^*(\delta-). \end{aligned} \quad (188)$$

Vis fra ligning 185 at da vil også

$$\frac{dC^*}{dx^*}(\delta+) = \frac{dC^*}{dx^*}(\delta-). \quad (189)$$

Vi oppsummerer den matematiske modellen:

Ligninger:

$$\frac{dv^*}{dx^*} = \frac{Pc}{A} (C^*(x^*) - C_0), \quad 0 \leq x^* \leq L, \quad (190)$$

$$C^* v^* - D \frac{dC^*}{dx^*} = \begin{cases} \frac{N_0 c}{A} x^*, & x^* < \delta, \\ \frac{N_0 c}{A} \delta & \delta \leq x^*. \end{cases} \quad (191)$$

Størrelse	Enhet	Min.verdi	Typisk verdi	Max.verdi
r	cm	10^{-6}	5×10^{-6}	10^{-4}
L	cm	4×10^{-4}	10^{-2}	2×10^{-2}
δ	cm	4×10^{-5}	10^{-3}	2×10^{-3}
D	cm^2/s	10^{-6}	10^{-5}	5×10^{-5}
N_0	$\text{mOsm}/\text{cm}^2\text{s}$	10^{-10}	10^{-7}	10^{-5}
P	$\text{cm}^4/\text{s mOsm}$	10^{-6}	2×10^{-5}	2×10^{-4}
C_0	mOsm/cm^3	–	3×10^{-1}	–

Tabell 6: Oversikt over størrelser i modellen. r er radius i kanalen som vi antar har sirkulært tverrsnitt.

Randbetingelser:

$$v^*(0) = 0, \quad C^*(L) = 0, \quad (192)$$

$$v^*, C^* \text{ kontinuerlige for } x^* = \delta. \quad (193)$$

Bestem

$$Os^* = \frac{F^*(L)}{v^*(L)} = \frac{cN_0\delta}{Av^*(L)}. \quad (194)$$

3.3.2 Skalering

Her trenger vi først å skaffe oss en oversikt over verdiene til størrelsene som inngår, og Tabell 6 er kopiert fra Lin&Segel (Table 8.2, s. 264).

Vi kan bruke både L og δ som lengdeskala, men følger Lin&Segel og bruker δ . Konsentrasjons-skalaen gir seg selv, C_0 , mens hastighets-skalaen krever noe kreativitet. Lin&Segel foreslår å beregne hastigheten U som trengs for at en saltoppløsning med konsentrasjon C_0 skal skille ut samme saltmengde pr. tidsenhet som her, med andre ord,

$$cN_0\delta = C_0 \times (AU), \quad (195)$$

eller

$$U = \frac{cN_0\delta}{C_0A}. \quad (196)$$

Dermed kan vi sette

$$x^* = \delta x, \quad C^* = C_0 C, \quad v^* = Uv, \quad (197)$$

og overlater til leseren å sjekke at vi kan skrive resultatet som

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dv}{dx} &= C - 1, \quad 0 \leq x \leq \lambda, \\ Cv - \eta \frac{dC}{dx} &= \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq \lambda \end{cases}, \end{aligned} \quad (198)$$

med betingelsene

$$v(0) = 0, \quad C(\lambda) = 1, \quad (199)$$

$$v, C, dC/dx \text{ kontinuerlige ved } x = 1, \quad (200)$$

Størrelse	Min.verdi	Typisk verdi	Max.verdi
ε	10^{-5}	2×10^{-2}	10^2
η	4×10^{-3}	75	10^{10}
λ	10	10	500

Tabell 7: Oversikt over størrelse på de dimensjonsløse parametrene.

og tre dimensjonsløse parametre:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{N_0}{PC_0^2}, \\ \eta &= \frac{AC_0D}{N_0\delta^2c}, \\ \lambda &= \frac{L}{\delta}.\end{aligned}\tag{201}$$

Den dimensjonsløse ”emergert osmolarity”, blir

$$Os = \frac{Os^*}{C_0} = \frac{1}{v(\lambda)}.\tag{202}$$

Området for størrelsen på de dimensjonsløse variablene kan vi nå anslå ut fra tabell 6 og finner verdier som angitt i tabell 7.

3.3.3 Perturbasjonsregning

Ligningene våre ser ikke vanskelige ut ved første øyekast, men de er ikke-lineære og koblete, og startbetingelsene for C og v er gitt for hver sin ende av kanalen!

Siden ε typisk vil være liten, er det nærliggende å forsøke en perturbasjonsløsning, og Lin&Segel beskriver her hvordan de først kjørte seg fast ved å føre inn

$$\begin{aligned}C &= C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots, \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots\end{aligned}\tag{203}$$

i ligningene 198 (NB! C_0 er her 0-te ordens løsning og ikke konsentrasjonsskalaen). Sjekk at vi til orden ε^0 får $C_0 = 1$, og

$$1v_0 + \eta \frac{dC_0}{dx} = \begin{cases} x \\ 1 \end{cases},\tag{204}$$

dvs.

$$v_0 = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \leq \lambda \end{cases}\tag{205}$$

Dette ser greit ut så langt, men til orden ε^1 får vi

$$C_1 = \frac{dv_0}{dx} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases},\tag{206}$$

med andre ord, C_1 blir diskontinuerlig. Også perturbasjonsløsningene bør være kontinuerlige!

Det er altså et eller annet som ikke holder i antagelsene vi har gjort. Hvis vi ser på uttrykkene for ε og η , forekommer N_0 i telleren på ε og i nevneren for η . I tillegg ser det ut til at N_0 kan

varierte over mer enn 12 tier-potenser! Dette betyr at hvis ε er liten, er gjerne η stor. Derfor prøver Lin&Segel seg nå med en mer stabil parameter κ definert ved

$$\eta = \frac{(\lambda^2/\kappa^2)}{\varepsilon}. \quad (207)$$

Det essensielle her er naturligvis at $\eta \propto \varepsilon^{-1}$, mens selve formen som er valgt gir oss enklere regneuttrykk. Hvis vi fører inn dette, får vi et sett modifiserte ligninger,

$$C - 1 = \varepsilon \frac{dv}{dx}, \quad 0 \leq x \leq \lambda, \quad (208)$$

$$\varepsilon \kappa^2 C v - \lambda^2 \frac{dC}{dx} = \varepsilon \kappa^2 \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq \lambda \end{cases}, \quad (209)$$

$$v(0) = 0, \quad C(\lambda) = 1, \quad (210)$$

$$v, C, dC/dx \text{ kontinuerlig ved } x = 1. \quad (211)$$

Videre er

$$\varepsilon = \frac{N_0}{PC_0^2}, \quad \kappa = \left(\frac{\lambda^2}{\eta \nu} \right)^{1/2} = \left(\frac{cPC_0L^2}{AD} \right)^{1/2}, \quad \lambda = \frac{L}{\delta} \quad (212)$$

Før vi starter på en ny perturbasjonsutvikling kan vi prøve oss med noen numeriske eksperimenter. Ligningene er et første ordens system, men for å løse dem på standardmåten, må vi starte $C(x)$ og $v(x)$ i samme punkt. Vi velger å starte i 0, men da trenger vi å variere $C(0)$ slik at vi virkelig treffer $C(\lambda) = 1$. Dette kalles naturlig nok en "skyte-metode". Søket etter startverdien kan en bygge inn i programmet, men her er det like enkelt å prøve seg fram manuelt. MatlabTM-koden som trengs for å løse ligningene er enkel:

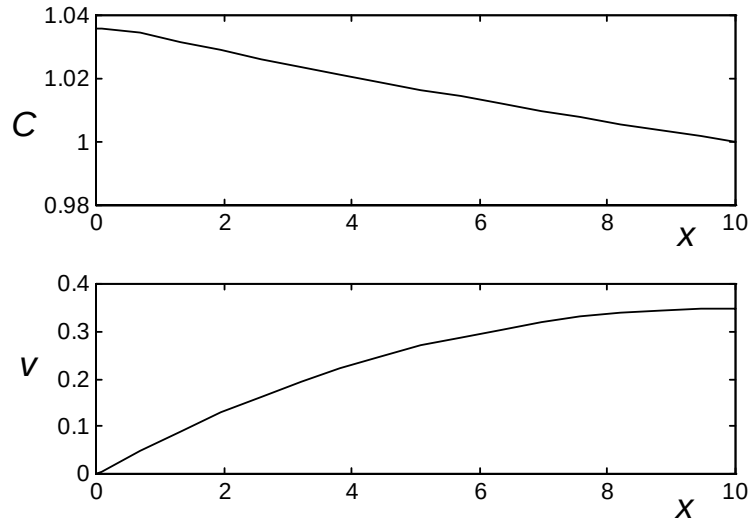
```
x0=[0, 1.0355]; tspan = [0, 10];
[t,x]=ode45('nyre',tspan,x0);
subplot(2,1,1);plot(t,x(:,2));
subplot(2,1,2);plot(t,x(:,1));
```

Funksjonen som definerer ligningene:

```
function xdot=nyre(t,x)
lambda = 10.;
kappa = 1;
eps = .5;
A= eps*kappa^2/lambda^2;
xdot(1)=( x(2)-1 )/eps;
xdot(2)=A*x(1)*x(2)-A*min(t,1);
```

Et eksempel på resultatet er vist i figur 18.

La oss så se på de modifiserte ligningene, og igjen prøve med en rekkeutvikling som i lign. 203.



Figur 18: Løsning oppnådd med "skyte-metoden". Parameterverdier: $\lambda = 10$, $\kappa = 1$, $\varepsilon = .5$. For å ende i 1 for $x = 10$, må $C(0)$ være omlag 1.0355.

Til orden ε^0 får vi som før $C_0 = 1$, men nå blir ligningene til orden ε mer interessant:

$$C_1 = \frac{dv_0}{dx}, \quad (213)$$

$$\kappa^2 C_0 v_0 - \lambda^2 \frac{dC_1}{dx} = \kappa^2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (214)$$

dvs.

$$\kappa^2 v_0 - \lambda^2 v_0'' = \kappa^2 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \quad (215)$$

for v_0 . Denne ligningen må løses for begge høyresidene og settes sammen slik at randbetingelsen i 0 og kontinuitets-betingelsene i $x = 1$ holder. Vi overlater til leserne å sjekke uttrykkene.

Løsning for $0 \leq x \leq 1$:

$$v_0 = x - K_1 \sinh\left(\frac{\kappa}{\lambda}x\right) \quad (216)$$

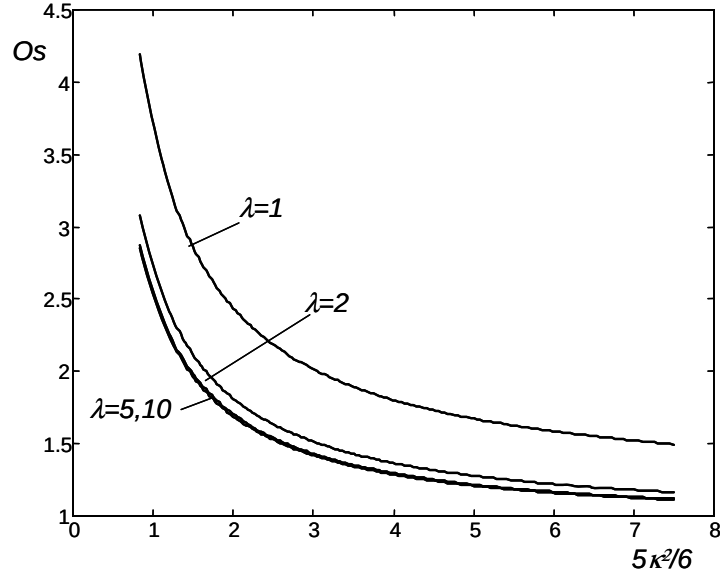
$$C_1 = v_0' = 1 - K_1 \frac{\kappa}{\lambda} \cosh\left(\frac{\kappa}{\lambda}x\right) \quad (217)$$

Løsning for $1 \leq x \leq \lambda$:

$$v_0 = 1 - K_2 \cosh\left(\frac{\kappa}{\lambda}x - \kappa\right), \quad (218)$$

$$C_1 = v_0' = -K_2 \frac{\kappa}{\lambda} \sinh\left(\frac{\kappa}{\lambda}x - \kappa\right) \quad (219)$$

(merk at $C_1(\lambda) = 0$!)



Figur 19: Dimensjonsløs osmolaritet til første orden i følge ligning \ref{os}.

Konstantene K_1 og K_2 bestemmes av kontinuitetsbetingelsene for $x = 1$:

$$K_1 = \frac{\lambda \cosh(\kappa/\lambda - \kappa)}{\kappa \cosh(\kappa)}, \quad (220)$$

$$K_2 = \frac{\lambda \sinh(\kappa/\lambda)}{\kappa \cosh(\kappa)}. \quad (221)$$

Den tilnærmede dimensjonsløse osmolariteten blir

$$Os = \frac{1}{v(\lambda)} \approx \frac{1}{v_0(\lambda)} = \frac{1}{1 - K_2}, \quad (222)$$

og den er plottet for noen verdier av λ på figur 19.

Hvis vi antar at $\kappa/\lambda < 1$, kan vi skrive

$$Os \approx \frac{1}{1 - K_2} \approx \frac{1}{1 - \frac{1}{\cosh(\kappa)}} = \frac{\cosh(\kappa)}{\cosh(\kappa) - 1}, \quad (223)$$

og hvis i tillegg $\kappa < 1$, vil

$$Os \approx \frac{\cosh(\kappa)}{\cosh(\kappa) - 1} \approx \frac{1 + \kappa^2/2 + \dots}{\kappa^2/2 + \dots} \approx \frac{2}{\kappa^2} + 1. \quad (224)$$

3.3.4 Epilog

Lin&Segel gjennomførte denne analysen på 70-tallet. I dag ville vi nok startet med en del numeriske eksperimenter. Men siden problemet har tre dimensjonsløse parametre, er det vanskelig å skaffe seg oversikt over sammenhengene bare fra disse. Det er morsomt at den "naive" perturbasjonsutviklingen bryter sammen, og at den modifiserte perturbasjonsløsningen ser ut til å gi

et fornuftig svar allerede til ledende orden (overlates til leseren å sjekke ut). Til ledende orden er emergent osmolaritet kun avhengig av λ og κ . Perturbasjonsutviklingen gir med andre ord en analytisk innsikt som det ikke er så lett å skaffe seg med numeriske eksperimenter.

De dimensjonsløse parametrene som vi ender opp med uttrykker ofte viktige egenskaper med modellen vi har laget. Slik er det også i dette eksemplet, der parameteren κ kan tolkes på følgende måte ($\bar{C}$ er midlere konsentrasjon i kanalen):

$$\frac{\kappa^2}{2} = \frac{PcC_0L^2}{AD^2} = \frac{PcC_0L^2}{AD^2} \frac{\bar{C} - C_0}{\bar{C} - C_0} = \frac{(cLP(\bar{C} - C_0)) C_0 \frac{1}{A}}{D(\bar{C} - C_0)/(L/2)}. \quad (225)$$

Nå kan vann som kommer inn ved osmose uttrykkes omlag som $cLP(\bar{C} - C_0)$, og følgelig blir konvektiv fluks av salt ut av kanalen

$$F_{conv.} \approx PcL(\bar{C} - C_0) \times C_0 \times \frac{1}{A}. \quad (226)$$

På samme vis kan vi skrive

$$F_{diff} \approx -D \overline{\left(\frac{dC^*}{dx^*} \right)} \approx D \frac{\bar{C} - C_0}{L/2}. \quad (227)$$

Dermed ser vi at

$$\frac{\kappa^2}{2} \approx \frac{F_{conv.}}{F_{diff.}}, \quad (228)$$

og

$$Os = \frac{Os^*}{C_0} = \frac{F^*(L)}{v^*(L)C_0} = \frac{F_{conv.} + F_{diff}}{F_{conv.}} = 1 + \frac{F_{diff}}{F_{conv.}} \approx 1 + \frac{2}{\kappa^2}, \quad (229)$$

som vi også fant ovenfor.

Referanser

- [1] Brigham, P.W. : *Dimensional Analysis*, Yale University Press, 1922.
- [2] Lin, C.C. og L.A. Segel: *Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences*, SIAM Classics in Applied Mathematics, 1988.
- [3] Munson, B.R., D.F. Young og T.H. Okiishi: *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley 1990.
- [4] Sedov, L.I. : *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Acad. Press, 1959.
- [5] Taylor, E.S. : *Dimensional Analysis for Engineers*, Clarendon Press, 1974.