TMA 4195 Matematisk modellering
Midtsemesterprøve 10. oktober 2007

Løsning med kommentarer

Oppgave 1:

Kraften (F) på en flypropell avhenger av dens diameter, d, hastigheten på flyet, u, luftas tetthet, ρ, antall omdreininger pr. sekund, ω, og luftas viskositet, μ.

Vis hvordan en bruker dimensjonsanalyse til å utlede formelen

$$F = \rho u^2 d^2 \phi \left(\frac{\omega d}{u}, \frac{ud}{\mu/\rho} \right), \tag{1}$$

hvor ϕ er en ukjent funksjon av to variable (Vink: Bruk, om nødvendig, ligning 1 til å finne enhetene til størrelsene som inngår).

Løsning, oppgave 1:

Vi har i utgangspunktet en relasjon

$$F = f\left(d, u, \rho, \omega, \mu\right), \tag{2}$$

og må først finne dimensjonsmatrisen. Her antar vi at enhetene til F, d, u og ρ alle er kjente, og vi finner da fra lign. 1 at $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$ og $[\mu] = \mathrm{kgm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$:

	F	d	u	ρ	ω	μ
kg	1	0	0	1	0	1
m	1	1	1	-3	0	1
s	-2	0	-1	0	-1	-1

Med matrise av rang 3, og d, u og ρ som de naturlige kjernevariable, ser vi umiddelbart at

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{F}{\rho u^2 d^2}, \\ \pi_2 &= \frac{\omega}{u/d}, \\ \pi_3 &= \frac{\mu}{\rho u d}. \end{aligned} \tag{3}$$

En mulig sammenheng vil nå være

$$\pi_1 = \phi\left(\pi_2, \frac{1}{\pi_3}\right), \tag{4}$$

som nettopp gir oppgitt formel.

Oppgave 2:

Ligningen

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y^*}{dt^{*2}} + \mu\frac{dy^*}{dt^*} + ky^* &= 0, \\ y^*(0) &= 0, \\ m\frac{dy^*}{dt^*}(0) &= I. \end{aligned} \tag{5}$$

beskriver ei kule som henger i ei fjær med dempning. Ved $t^* = 0$ slår vi på kula med en hammer slik at den får en impuls I og et vertikalt utslag $y^*(t^*)$, $t^* \geq 0$.

(a) Bestem tid og lengdeskalaer T og L, samt ε slik at det skalerte problemet får formen

$$\varepsilon\ddot{y} + \dot{y} + y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad \varepsilon\dot{y}(0) = 1. \tag{6}$$

(Vink: Benytt at du skal fram til lign. 6, og ikke nødvendigvis fysiske resonnementer).

(b) Finn ytre, indre, og uniform løsning til ledende orden ved hjelp av singulær perturbasjon.

Løsning, oppgave 2:

(a) Vi følger vinket og setter inn $y^* = Ly$ og $t^* = Tt$ i selve ligningen,

$$m\frac{L}{T^2}\ddot{y} + \mu\frac{L}{T}\dot{y} + kLy = 0, \tag{7}$$

som dermed reduseres til

$$\frac{m}{k}\frac{1}{T^2}\ddot{y} + \frac{\mu}{k}\frac{1}{T}\dot{y} + y = 0. \tag{8}$$

Dermed kan vi umiddelbart slutte at $T = \mu/k$, mens

$$\varepsilon = \frac{m}{k}\frac{1}{T^2} = \frac{mk}{\mu^2}. \tag{9}$$

Tilslutt setter vi inn startbetingelsen for $\frac{dy^*}{dt^*}$ og dividerer med I. Dette gir oss

$$\frac{mL}{TI}\dot{y}(0) = \varepsilon\dot{y}(0) = 1, \tag{10}$$

og følgelig blir

$$L = \frac{TI}{m}\varepsilon = \frac{\mu I}{km}\frac{mk}{\mu^2} = \frac{I}{\mu}. \tag{11}$$

Tillegg : Man hva betyr så disse skalaene? Tidsskalaen T er knyttet til hvor raskt kula kommer tilbake til utgangspunktet hvis den trekkes ut til siden og slippes, og vi neglisjerer tregheten knyttet til massen (Løser altså $\mu\frac{dy^*}{dt^*} + ky^* = 0$). Videre er ε uttrykk for forholdet mellom T og egenperioden T_p til systemet hvis vi ikke hadde hatt dempning:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0^{-2}}{T^2},\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_p}. \tag{12}$$

Lengdeskalaen er litt mer mystisk, men systemet fikk altså hastigheten I/m i starten. Hvis vi ser bort fra fjæra, vil hastigheten dempes eksponensielt, $v^* = \frac{I}{m}\exp\left(-\frac{\mu}{m}t^*\right)$, og strekningen den da går blir

$$L = \int_{t^*0}^{\infty} v^* dt = \frac{I}{\mu}. \tag{13}$$

Det er naturligvis ikke lett å hoste opp disse skalaene uten videre, og det var da heller ikke meningen.

(b) *Ledende orden* betyr det første leddet i rekkeutviklingene.

Den ytre løsningen finner vi som vanlig ved å sette inn

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \cdots \tag{14}$$

som til ledende orden gir oss

$$\dot{y}_0 + y_0 = 0, \tag{15}$$

og følgelig

$$y_0(t) = Ae^{-t}. \tag{16}$$

Vi får problemer med startbetingelse, siden f.eks. $y_0(0) = 0$ gir oss $y_0(t) = 0$ for alle $t > 0$. Denne løsningen må derfor kombineres med en indre løsning som tar seg av starten av bevegelsen. Vi trenger en ny tidsskala i starten, og det opplagte valget er å sette $t = \varepsilon\tau$, som gir oss reskalerte ligninger

$$\begin{aligned} &\frac{d^2Y}{d\tau^2} + \frac{dY}{d\tau} + \varepsilon Y = 0, \\ &Y(0) = 0, \frac{dY}{d\tau}(0) = 1. \end{aligned} \tag{17}$$

Løsningen til ledende orden er

$$Y_0(\tau) = 1 - e^{-\tau}, \tag{18}$$

og "matching"-kravet

$$\lim_{\tau\to\infty} Y_0(\tau) = \lim_{t\to 0} y_0(t) \tag{19}$$

gir oss

$$A = 1. \tag{20}$$

Dermed blir konklusjonen:

- Ytre løsning til ledende orden: $y_0(t) = e^{-t}$
- Indre løsning til ledende orden: $Y_0(t) = 1 - e^{-t/\varepsilon}$,
- Uniform løsning til ledende orden: $y_0^{(u)} = y_0(t) + Y_0(t) - \lim_{\tau\to\infty} Y_0(\tau) = e^{-t} - e^{-t/\varepsilon}$.

Oppgave 3:

Den aller enkleste modellen for middeltemperaturen på jorda kan skrives

$$C\frac{dT}{dt} = Q_0 - \sigma T^4 \tag{21}$$

(C og σ er konstanter). Venstre side er endring i lagret varmeenergi, Q_0 er gjennomsnittlig innstråling fra sola, mens siste ledd er varmetap ved utstråling til verdensrommet (alt regnet pr. flateenhet). I oppgaven kan en bruke $Q_0/\sigma = (287K)^4$ og $C/\sigma = 6 \times 10^9 døgn \times K^3$.

(a) Finn stasjonær temperatur, vis at den er stabil overfor forstyrrelser, og anslå tiden det tar for et avvik fra likevektstemperaturen å dø ut.

Mengden av absorbert stråling fra sola avhenger blant annet av overflatens farge (albedo). Under istider, der en relativt større del av jorda er snø- og isdekket, vil gjennomsnittlig absorbert energi være mindre. Leddet Q_0 er derfor foreslått modifisert til

$$Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T - T_0}{T_n}\right), \tag{22}$$

der $Q_0 - Q_a$ representerer istider, $Q_0 + Q_a$ varme perioder, og T_0 er likevektstemperaturen fra (a).

(b) Diskutér den modifiserte modellen, og forklar spesielt hva som kan inntreffe hvis

$$T_n < \frac{Q_a}{4Q_0} T_0 \tag{23}$$

og Q_0 varierer.

(Vink: En kvalitativ diskusjon med en skisse er nok. Husk at
$\tanh(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -1$, $\tanh(x) = x + O(x^3)$, $|x| \ll 1$, og $\tanh(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1$)

Løsning:

Likevektspunktene finner vi fra

$$Q_0 - \sigma T^4 = 0, \tag{24}$$

med andre ord

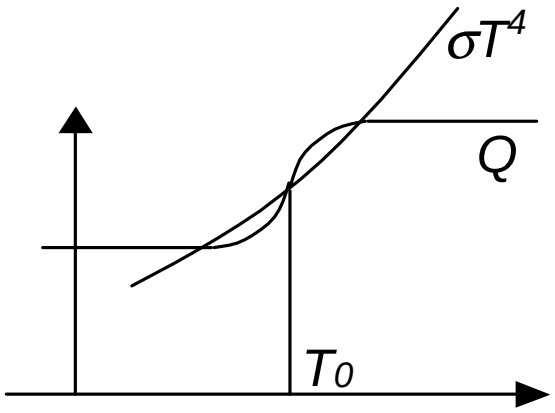
$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{Q_0}{\sigma}} = 287\text{K}. \tag{25}$$

Vi sjekker at T_0 er stabil ved å observere at

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{Q_0 - \sigma T^4}{C}\right) = -\frac{1}{C}\sigma 4 T_0^3 < 0. \tag{26}$$

Rundt T_0 kan vi linearisere ligningen ved å skrive $T = T_0 + y$, og dette gir oss $\dot{y} = \left(-\frac{1}{C}\sigma 4 T_0^3\right) y$. Hvis vi har en forstyrrelse slik at $y(0) = y_0$, blir løsningen

$$y(t) = y_0 \exp\left(-\frac{1}{C}\sigma 4 T_0^3 t\right), \tag{27}$$



Figur 1: Figuren illustrerer at vi kan enten ha en eller tre likevektsløsninger når $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$. Bare løsningene på endene er stabile.

som dør ut ($e^{-5} \approx 0.007$) etter omlag

$$t = 5\frac{1}{\frac{1}{C}\sigma 4T_0^3} = 5\frac{6\times 10^9 \text{døgn}\times \text{K}^3}{4\left(283\text{K}\right)^3} \approx 330\text{døgn}. \tag{28}$$

(b)
Et likevektspunkt, T_s, blir nå en løsning av

$$f\left(T\right) = Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T-T_0}{T_n}\right) - \sigma T^4 = 0, \tag{29}$$

og stabilitet avgjøres av hvorvidt $f'(T_s)$ er større eller mindre enn 0. For likevektstemperaturen fra (a) og hintet om tanh får vi

$$f'(T_0) = \frac{Q_a}{T_n} - 4\sigma T_0^3 = \frac{Q_a}{T_n} - \frac{4}{T_0}Q_0 = \frac{Q_a}{T_n}\left(1 - \frac{4Q_0T_n}{T_0Q_a}\right). \tag{30}$$

Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$ blir følgelig $f'(T_0) > 0$ og ikke T_0 lenger stabil! Situasjonen er illustrert på fig. 1. ∂

Det som styrer de store klimaendringene på jorda er variasjoner i innstrålingen Q_0. Dette flytter $Q_0 + Q_a \tanh\left(\frac{T-T_0}{T_n}\right)$ opp og ned. Hvis $T_n < \frac{Q_a}{4Q_0}T_0$, er det dermed ikke overraskende at overgangen mellom istider og varme perioder kan skje temmelig brått. Videre funderinger over denne modellen, som ble introdusert så sent som i 1987 av Ghil og Childress (usikker på referansen), overlates til leserne.

Oppgave 4:

En lang og smal korridor på en flyplass består av en gangvei og et rullebånd som starter midt i korridoren. Rullebåndet går med hastigheten v_0 og kan maksimalt ta ρ_0 passasjerer pr. meter. Alle passasjerer på båndet kan også gå (her skulle det stått: ***går****) med en hastighet relativt til båndet gitt som*

$$v_B^*(\rho^*) = v_0(1 - \rho^*/\rho_0).$$

Korridoren før båndet kan maksimalt ta $4\rho_0$ passasjerer, og her er ganghastigheten gitt ved

$$v^* = v_0(1 - \rho^*/(4\rho_0)).$$

Trafikken går bare i en retning og det er ikke mulig å gå ved siden av båndet.

(a) Still opp uttrykkene for fluks før og oppe på båndet. Skalér størrelsene som går inn og skriv opp de skalerte differensialligningene for ρ som gjelder før og på båndet når vi antar en rimelig lengdeskala L (Bruk samme skalaer før og på båndet).

(b) Hvilken betingelse på fluksen må være oppfylt ved inngangen til båndet, og hva er tettheten rett før rullebåndet når fluksen av passasjerer akkurat inne på båndet er så stor som mulig?

(c) På grunn av en teknisk feil har båndet vært stengt ved inngangen. I korridoren før båndet står det derfor maksimal tetthet av utålmodige passasjerer, mens båndet er tomt. Båndet settes i drift ved $t = 0$. Tegn opp karakteristikkene og bestem løsningen $\rho(x,t)$ for $t > 0$, når det oppgis at fluksen ved starten av båndet holder seg konstant og lik den maksimale fra (b).

Løsning:

(a) Utenfor båndet blir fluksen

$$j_1^* = \rho^* v_0 \left(1 - \rho^*/\left(4\rho_0\right)\right), \tag{31}$$

mens vi på båndet får vi et tillegg i hastigheten, slik at

$$j_2^* = \rho^* \left(v_0 + v_B^*\right) = \rho^* \left(\left(2 - \rho^*/\rho_0\right)\right). \tag{32}$$

Vi bruker ρ_0 som skala for ρ^* og v_0 for v^*. Med skala L for x^*, blir dermed naturlig tidsskala $T = L/v_0$. Dimensjonsløs fluks før og på båndet blir, henholdsvis,

$$\begin{aligned} j_1 &= \rho\left(1 - \rho/4\right), \\ j_2 &= \rho\left(2 - \rho\right). \end{aligned} \tag{33}$$

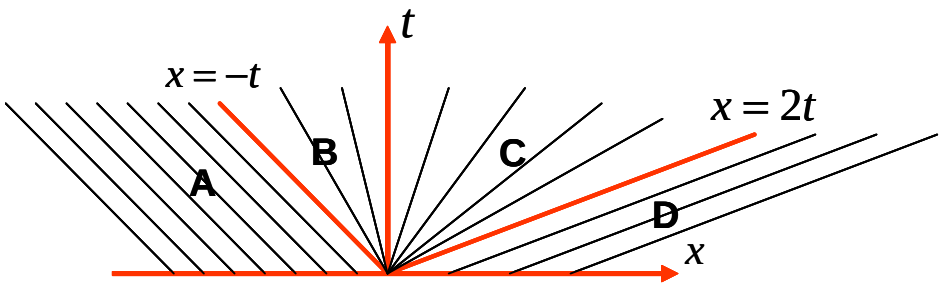
Kinematiske hastigheter er definert som

$$c_1(\rho) = \frac{dj_1}{d\rho} = 1 - \rho/2, \tag{34}$$

$$c_2(\rho) = \frac{dj_2}{d\rho} = 2\left(1 - \rho\right), \tag{35}$$

og diff.ligningene blir følgelig

$$\begin{aligned} \text{Før båndet:} \quad & \rho_t + \left(1 - \rho/2\right)\rho_x = 0, \\ \text{På båndet:} \quad & \rho_t + \rho\left(2 - \rho\right)\rho_x = 0. \end{aligned} \tag{36}$$



Figur 2: Karakteristikker til problemet i (c). I $x = 0$ vil vi ha et (tidsuavhengig) sprang i tettheten fra $\rho = 2$ til venstre og $\rho = 1$ til høyre for origo.

(b) Ved overgangen mellom korridor og rullebånd må fluksen være kontinuerlig. Maksimal fluks på rullebåndet, $j_{2\max} = 1$, har vi når $\rho_2 = 1$. Da må vi ha at tettheten rett før båndet oppfylle

$$\rho_1 (1 - \rho_1/4) = 1, \tag{37}$$

med andre ord, $\rho_1 = 2$.

(c) For $t = 0$ har vi følgende situasjon

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 4, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \tag{38}$$

og

$$c(x, 0) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 2, & x > 0. \end{cases} \tag{39}$$

Karakteristikkene som starter for $x \neq 0$ er skissert på figur 2, og bestemmer løsningen i områdene A og D.

Vi legger forøvrig merke til at karakteristikkene med $\rho = 2$ til venstre for $x = 0$ og $\rho = 1$ til høyre for $x = 0$ er parallelle ($c = 0$), slik at tipset i oppgaveteksten stemmer. Karakteristikkene i områdene B og C danner ekspansjonsvifter. En karakteristikk som starter i 0 vil ha ligningen

$$x = c(\rho)\, t, \tag{40}$$

og dette gir oss, sammen det vi leser ut av figuren, løsningen umiddelbart:

$$\rho(x, t) = \begin{cases} 2, & x \leq -t, & \text{(A)} \\ 2 - \frac{2x}{t}, & -t < x < 0 & \text{(B)} \\ 1 - \frac{x}{2t}, & 0 < x < 2t & \text{(C)} \\ 0 & x \geq 2t. & \text{(D)} \end{cases} \tag{41}$$