MIDTSEMESTERPRØVE I MATEMATISK MODELLERING (TMA4195)
Torsdag 5. oktober 2006
Løsning

Oppgave 1

En fallskjermhopper med hastighet U i fritt fall opplever en luftmotstand i form av en kraft

$$F_l = \frac{1}{2}\rho_{\text{luft}} A U^2 \phi\left(\frac{U\sqrt{A}}{\nu}\right),$$

der ρ_{luft} er tettheten til lufta, A er arealet av fallskjermhopperen på tvers av fallretningen, og ν er luftas kinematiske viskositet.

(a) Sett opp dimensjonsmatrisen og vis kort hvordan et slikt uttrykk kan finnes fra dimensjonsanalyse (Vink: Bruk eventuelt formelen til å bestemme enheter).

(b) Etter ei stund vil hopperen falle med konstant hastighet. Finn et uttrykk for denne hastigheten hvis $\phi(x) = 1$ (Tyngdekraften er mg, der m er hopperens masse og g er tyngdens akselerasjon).

(c) Beskriv mulige skalaer til problemet hvis hopperen hopper fra henholdsvis lav og stor høyde H.

Løsning:

(a) Det er ikke urimelig at

$$F_l = f\left(\rho_{\text{luft}}, A, U, \nu\right).$$

Dermed kan vi sette opp dimensjonsmatrisen (Ser fra den oppgitte formelen at $[\nu] = \text{m}^2/\text{s}$):

	F_l	ρ_{luft}	A	U	ν
kg	1	1	0	0	0
m	1	−3	2	1	2
s	−2	0	0	−1	−1

Siden matrisen har rang 3, er det 2 dimensjonsløse variable. Hvis vi bruker ρ_{luft}, A og U som kjernevariable, finner vi lett at

$$\pi_1 = \frac{F_l}{\rho_{\text{luft}} A U^2},$$
$$\pi_2 = \frac{U A^{1/2}}{\nu},$$

som gir oss den oppgitte formelen.

(b) Hastigheten U_0 må bli gitt av at $mg = F_l$. Med $\phi(x) = 1$ får vi

$$\frac{1}{2}\rho_{\text{luft}} A U_0^2 = mg,$$

eller

$$U_0 = \sqrt{\frac{2mg}{\rho_{\text{luft}} A}}.$$

(For $m = 75\text{kg}$, $A = 0.5\text{m}^2$, $\rho_{\text{luft}} = 1.2\text{kg/m}^3$, finner vi $U_0 \approx 50\text{m/s} = 180\text{km/time}$).

(c) La lengdeskalaen være L og tidsskalaen T. Fra stor høyde anslår vi skalaen ved å si at hopperen har konstant hastighet U_0. Fra liten høyde er luftmotstanden neglisjerbar (!). Dette gir for stor høyde

$$L = H,\ T = H/U_0,$$

og fra liten høyde

$$L = H,\ T = \sqrt{2H/g}.$$

Oppgave 2

(a) Med utgangspunkt i skalering, hva er forskjellen på regulær og singular perturbasjon?
(b) Finn $y_0(x) + \varepsilon y_1(x)$ *for* $x \geq 0$ *hvis*

$$y''(x) + \varepsilon y'(x) + 1 = 0,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

Løsning:

(a) For regulær perturbasjon greier vi oss med én skala for den uavhengige variable, mens for singular perturbasjon må vi bruke mer enn en, og skalaene er gyldige for ulike områder.

(b) Vi setter inn potensrekken i ε:

$$y''(x) + \varepsilon y'(x) + 1 =$$
$$\left(y_0'' + \varepsilon y_1'' + \ HOL\right) + \varepsilon\left(y_0' + \varepsilon y_1' + \ HOL\right) + 1 = 0.$$

Dette gir oss ligningene

$$y_0'' = -1,$$
$$y_1'' = -y_0'.$$

Med oppgitte startbetingelser blir

$$y_0(x) = -\frac{1}{2}x^2,$$
$$y_1(x) = \frac{1}{2 \cdot 3}x^3,$$

og dermed

$$y(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{6}\varepsilon + HOL.$$

Oppgave 3

Finn stasjonære punkter for ligningen

$$\frac{du}{dt} = \mu u - u^2$$

og bestem om de er stabile eller ustabile.

Løsning:

Stasjonære punkter blir gitt av

$$u(\mu - u) = 0,$$

eller

$$u_1 = 0,$$
$$u_2 = \mu.$$

Siden

$$\frac{d}{du}\left(\mu u - u^2\right) = \mu - 2u,$$

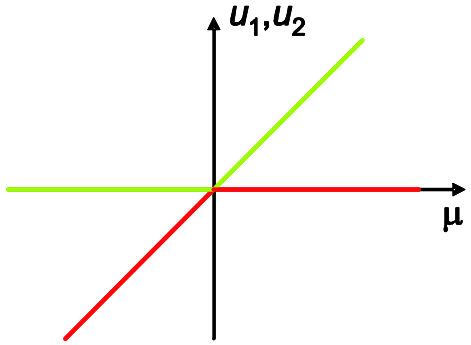


Figure 1: Bifurkasjonsdiagram for oppgave 3. Rødt er ustabilt og grønt er stabilt.

finner vi

$$\left.\frac{d}{du}\left(\mu u - u^2\right)\right|_{u_1} = \mu,$$
$$\left.\frac{d}{du}\left(\mu u - u^2\right)\right|_{u_2} = -\mu.$$

Bifurkasjonsdiagrammet er vist på fig. 1

PS: Som flere var inne på, er analysen ovenfor litt ufullstendig. For $\mu = 0$, er ligningen

$$\dot{u} = -u^2,$$

med stasjonært punkt $u = 0$. Dette punktet kan vi ikke karakterisere med lineær analyse, selv om en ser at løsninger som starter på en liten positiv verdi ser ut til å konvergere mot 0, mens løsninger som starter for en liten negativ verdi avtar mot $-\infty$. Det kan en også avgjøre analytisk, siden generell løsning er

$$u\left(t\right) = \frac{1}{t + C}.$$

Hvis vi antar at $u\left(0\right) = u_0$, vil løsningen bli

$$u\left(t\right) = \frac{1}{t + \frac{1}{u_0}} = \frac{u_0}{u_0 t + 1},$$

og dermed ser vi at

$$\lim_{t\to\infty} u\left(t\right) = 0 \quad \text{når } u\left(0\right) > 0,$$
$$\lim_{t\nearrow -1/u_0} u\left(t\right) = -\infty \text{ når } u\left(0\right) < 0.$$

Punktet $u = 0$ er stabilt for positive og ustabilt for negative perturbasjoner når $\mu = 0$.

Oppgave 4

Følgende (skalerte) modell er foreslått for bestanden av hunner (F) og hanner (M) i en fiskepopulasjon:

$$\dot{F} = -F + \gamma\left(1 - e^{-M}\right)F,$$
$$\dot{M} = -M + \gamma\left(1 - e^{-M}\right)F,$$

der γ er en positiv konstant.

(a) Beskriv kort noen av modellens egenskaper. Hva skjer for eksempel når M er liten og når M er stor?

(b) Finn stajonære punkter og forsøk å bestemme hvilken type de er. Er modellen realistisk?

Vink: Det kan bli bruk for den generelle formelen

$$\Phi\left(F_0+f, M_0+m\right)=\Phi\left(F_0, M_0\right)+\frac{\partial \Phi}{\partial F}\left(F_0, M_0\right) f+\frac{\partial \Phi}{\partial M}\left(F_0, M_0\right) m+\mathcal{O}(f^2, mf, m^2).$$

Løsning:
(a)

- Med bare hunner eller hanner dør bestanden ut.
- Hvis $M \ll 1$, forenkles ligningene til

$$\dot{F} = -F + \gamma M F,$$
$$\dot{M} = -M + \gamma M F.$$

  Det siste leddet er knyttet til sjansen for at hunner og hanner treffes.

- Hvis M blir stor, er veksten av hanner avhengig av antall (fruktbare) hunner.
- Modellen er satt opp slik at antall hunner og hanner som fødes er likt.

Vi har et opplagt stasjonært punkt for $(F_0, M_0) = (0, 0)$, og siden lineariseringen rundt dette punktet blir

$$\dot{F} = -F,$$
$$\dot{M} = -M,$$

ser vi uten videre at matrisen i det lineariserte systemet er $-\mathbf{I}$, og følgelig er punktet en *stabil node*.

Det kan også finnes andre punkt (der både F og M er større enn 0) som er løsninger av

$$-F + \gamma\left(1 - e^{-M}\right) F = 0,$$
$$-M + \gamma\left(1 - e^{-M}\right) F = 0.$$

Siden vi da må ha

$$\left(1 - e^{-M}\right) = \frac{1}{\gamma},$$

vil vi få løsning *bare* hvis $\gamma > 1$, og da er

$$M_0 = -\log\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right).$$

Denne løsningen passer også for F , slik at

$$(F_0, M_0) = \left(-\log\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right), -\log\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

er et annet stasjonært punkt når $\gamma > 1$.

Det kan være litt problematisk å finne ut av lineariseringen rundt dette punktet, men siden vi har

$$\Phi\left(F_0+f, M_0+m\right)=0+\frac{\partial \Phi}{\partial F}\left(F_0, M_0\right) f+\frac{\partial \Phi}{\partial M}\left(F_0, M_0\right) m+HOL,$$

finner vi etter litt regning

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(-F+\gamma\left(1-e^{-M}\right) F\right)}{\partial F}\right|_{(F_0,M_0)} &= 0,\\
\left.\frac{\partial\left(-F+\gamma\left(1-e^{-M}\right) F\right)}{\partial M}\right|_{(F_0,M_0)} &= \gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) F_0=\left(\gamma-1\right) F_0,\\
\left.\frac{\partial\left(-M+\gamma\left(1-e^{-M}\right) F\right)}{\partial F}\right|_{(F_0,M_0)} &= \gamma\left(1-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right)=1,\\
\left.\frac{\partial\left(-M+\gamma\left(1-e^{-M}\right) F\right)}{\partial M}\right|_{(F_0,M_0)} &= -1+\gamma\left(1-\frac{1}{\gamma}\right) F_0=-1+\left(\gamma-1\right) F_0
\end{aligned}$$

Dette betyr at matrisen $\mathbf{A}$ for det lineariserte systemet får formen

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc} 0 & a \\ 1 & -1+a \end{array}\right],\ a=\left(\gamma-1\right) F_0>0.$$

Karakteristisk ligning blir

$$-\lambda\left(-1+a-\lambda\right)-a=\lambda^2+\left(1-a\right)\lambda-a=0$$

og siden egenverdiene dermed er -1 og a, blir punktet et *sadelpunkt*. Modellen er med andre ord ikke spesielt realistisk!