Utvikling av aldersprofilen til en befolkning

IMF oktober 2000/rev. november 2007
H.E. Krogstad

Notatet er basert på en eksamensoppgave gitt ved kontinuasjonseksamen i august 2000.

Ved et tidspunkt t har Norges befolkning en aldersfordeling $p(a,t)$, slik at antall innbyggere med alder mellom a_1 og a_2 er

$$\int_{a_1}^{a_2} p(a,t)da. \tag{1}$$

Vi må tenke på p som en *tetthet*, matematisk definert som

$$p(a,t) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\#\text{ innbyggere med alder mellom } a-\Delta a/2 \text{ og } a+\Delta a/2 \text{ ved tidsp. } t}{\Delta a}. \tag{2}$$

(Her, som ellers i modellering, må vi oppfatte dette på en pragmatisk måte, siden den matematiske grensen er 0 med sannsynlighet 1). Fordelingsfunksjonen er dermed en ikke-negativ funksjon som gir oss det totale antall innbyggere hvis vi integrerer fra $a = 0$ til f.eks. $a =$ 120år.

Vårt første mål er å sette opp en matematisk modell for tidsutviklingen av p. Modellen må beskrive fødsel, død og innvandring (evenuelt utvandring). Vi kan derfor starte med å se på endringen av antall innbyggere med alder mellom a_1 og a_2 over et kort tidsrom Δt. Dette gir oss følgende regnskap (bevarelse av innbyggere!):

$$\Delta\left(\int_{a_1}^{a_2} p(a,t)da\right) =$$
$$+ \text{ Innbyggere som rykker opp i aldersgruppen}$$
$$- \text{ Innbyggere som går ut av aldersgruppen}$$
$$- \text{ Innbyggere i aldersgruppen som dør}$$
$$+ \text{ Innvandring}$$

De to første bidragene er (til første orden)

$$p(a_1,t)\Delta t - p(a_2,t)\Delta t. \tag{3}$$

Innbyggere som dør i gruppen kan beskrives med en *mortalitet*, $m(a,t)$, slik at det blir (tilnærmet)

$$\left(-\int_{a_1}^{a_2} m(a,t)p(a,t)da\right)\Delta t. \tag{4}$$

I Norge må det være lov å anta at m kun er en funksjon av alder og tiden, og ikke avhenger av for eksempel hvor mange innbyggere det er i aldersgruppen.

Innvandring i løpet av perioden skrives på tilsvarende måte

$$\left(\int_{a_1}^{a_2} q(a,t)da\right)\Delta t \tag{5}$$

der $q(a,t)$ er antall innvandrere med alder a som kommer inn i landet pr. tidsenhet.

Hvis vi summerer regnskapet, dividerer med Δt og erstatter differensialkvotienten med en derivert, ender vi opp med en bevarelseslov på integralform

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{a_1}^{a_2} p(a,t)da\right) = p(a_1,t) - p(a_2,t) + \int_{a_1}^{a_2} \left(q(a,t) - m(a,t)p(a,t)\right) da \tag{6}$$

I motsetning til det en vanligvis møter, tid og rom, er variablene her *tid* og *alder*. Aldersfordelingen opptrer som både tetthet og fluks, mens kildeleddet har en mer vanlig form.

Hvis vi nå antar at vi har kontinuerlige funksjoner og kan flytte deriverte under integraltegnet, får vi ved hjelp av middelverdisetningen

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\xi_1,t)(a_2-a_1) = p(a_1,t) - p(a_2,t) + \left(q(\xi_2,t) - m(\xi_2,t)p(\xi_2,t)\right)(a_2-a_1),$$

der ξ_1 og ξ_2 ligger i intervallet $[a_1, a_2]$. Etter divisjon med $(a_2 - a_1)$ og grenseovergangene $a_1 \to a$ og $a_2 \to a$, følger differensialformen

$$\frac{\partial p}{\partial t}(a,t) + \frac{\partial p}{\partial a}(a,t) = -m(a,t)p(a,t) + q(a,t), \tag{7}$$

som blir en enkel kvasilineær 1. ordens partiell differensialligning.

Denne modellen ikke den eneste vi kunne tenke oss. Vi kunne alternativt ta et (semi)diskret standpunkt og dele befolkningen opp i aldersklasser, for eksempel aldersklasser med bredde 1år. Modellen ville da bli et *system* av ordinære ligninger med tid som uavhengig variabel og litt over 100 avhengige variable, og vi overlater til leseren å stille opp en slik modell. Det er ellers vanlig også å diskretisere tiden, slik at vi får et koblet system av differense-ligninger. De diskrete modellene er enklere å sette opp hvis en ikke har det matematiske grunnlaget for bevarelseslover, men de er ikke nødvendigvis enklere å analysere.

Det er ellers interessant å observere at vi ved å bruke partielle diff. ligninger kan beskrive hele modellen med én enkelt ligning!

Men modellen vår er ikke komplett. Vi har jo et kontinuerlig tilskudd til befolkningen som kommer inn med alder 0! Det er naturlig å tenke seg en modell på formen

$$p(0, t + t_0) = \int_{a_u}^{a_g} f(a)p(a, t)da, \tag{8}$$

der funksjonen $f(a)$ representerer befolkningens *forplantningsdyktighet*, og $t_0 \approx 9$ måneder. Vi antar altså at det kun er befolkning med alder mellom a_u og a_g som bidrar til fødselstallet.

Løsningen av ligningene (7) og (8) er ikke helt opplagt. Siden vi har med en kvasilineær 1. ordens partiell differentialligning å gjøre, er det naturlig først å finne karakteristikkene. Ligningen er på formen

$$P(a, t, p)\frac{\partial p}{\partial a} + Q(a, t, p)\frac{\partial p}{\partial t} = R(a, t, p) \tag{9}$$

der

$$\begin{aligned} P(a, t, p) &= 1, \\ Q(a, t, p) &= 1, \\ R(a, t, p) &= -m(a, t)p + q(a, t). \end{aligned} \tag{10}$$

Karakteristikkene er kurver i (a, t, p)-rommet som overalt er parallelle med vektorfeltet $\mathbf{V} = (P, Q, R)$. Hvis vi går et lite stykke (da, dt, dp) langs karakteristikken må denne biten være parallell med $\mathbf{V}$. Vi kan derfor skrive ligningene for karakteristikkene på kompakt form som

$$\frac{da}{P} = \frac{dt}{Q} = \frac{dp}{R}, \tag{11}$$

dvs.

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= 1, \\ \frac{dp}{da} &= -m(a, t)p + q(a, t). \end{aligned} \tag{12}$$

Projeksjonen av karakteristikkene ned i (a, t)-planet blir rette linjer, $a = t - a_0$, mens p vil variere i følge ligningen $\frac{dp}{da} = -m(a, a + a_0)p + q(a, a + a_0)$, som er en *lineær, første ordens ordinær diff.ligning*. Hvis vi starter en karakteristikk i punktet (a_0, t_0, p_0), vil den være bestemt av

$$\begin{aligned} t &= t_0 + (a - a_0), \\ p &= \exp(-M(a, t)) \left[p_0 + \int_{a_0}^{a} \exp(+M(a', t))q(a', t)da' \right], \\ M(a, t) &= \int_{a_0}^{a} m(a', t)da'. \end{aligned} \tag{13}$$

For denne ligningen vil altså projeksjonen av karakteristikkene i (a,t)-planet bli rette linjer, mens p varierer. Som et spesialtilfelle kan vi nå sette $m(a) = a$ og $q(a) = 0$. Da blir løsningen for p langs karakteristikken gitt av

$$\begin{aligned} \frac{dp}{da} &= -ap, \\ p(a_0) &= p_0, \end{aligned} \tag{14}$$

dvs.

$$p(a) = p_0 \exp\left(-\frac{a^2 - a_0^2}{2}\right). \tag{15}$$

Naturligvis skulle vi satt $m(a) = \infty$ for aldre over menneskets maksimale levetidsalder. Da ville p være 0 for slike verdier av a.

Hvis vi har gitt initial-verdiene

$$\begin{aligned} p(a,0) &= p_0(a) \text{ for } a \geq 0, \\ p(0,t) &= p_1(t) \text{ for } 0 \leq t \leq t_0 \end{aligned} \tag{16}$$

kan vi finne løsningen i området $a \geq 0$ og $t \leq t_0 + a$. Bruk figur 1 og sjekk at løsningen blir

$$p(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\exp\left(-\frac{a^2-(a-t)^2}{2}\right), & t \leq a \\ p_1(t-a)\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right), & a \leq t \leq a + t_0 \end{cases} \tag{17}$$

I begge tilfellene trenger vi først å gå langs karakterstikken tilbake til (den kjente) initial-verdien. Når vi kjenner den, kan vi gå samme veien tilbake til utgangspunktet og beregne hvor mye p har avtatt. Karakteristikkene representerer derfor *informasjonsveiene* i modellen. Vi går langs karakteristikkene for å få informasjon om løsningen. I dette tilfellet visste vi at projeksjonen av karakteristikkene var ei rett linje med stigning 1, men generelt må vi prøve og feile (dvs. løse en ikke-lineær ligning) for først å finne den aktuelle karakteristikken. Dette kan en visualisere som at vi går fram og tilbake på initialkurven, sender ut karakteristikker og prøver å treffe punktet (a,t) der vi er interessert i løsningen.

Nå har vi bestemt løsningen for $a \geq 0$ og $0 \leq t \leq a + t_0$. For større verdier av t trenger vi flere verdier oppover langs t-aksen. Vi ser at en etterhvert trenger å løse *fødselsintegralet* for å bestemme løsningen når t er større enn $a + t_0$,

$$p_1(t + t_0) = p(0, t + t_0) = \int_{a_u}^{a_g} f(a)p(a,t)da, \tag{18}$$

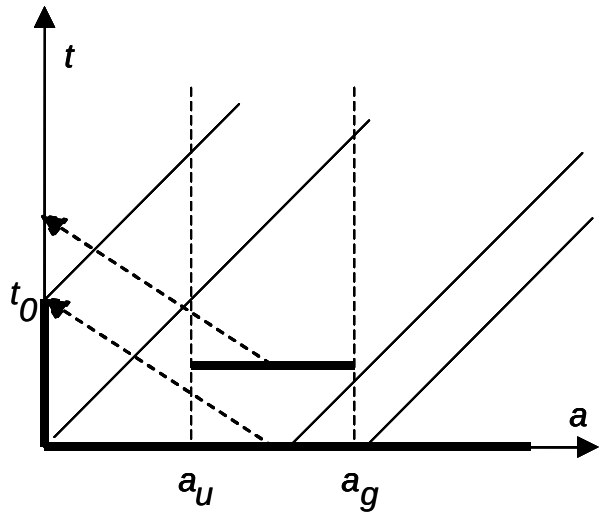


Figure 1: Løsning av ligningen ved hjelp av karakteristikker. Hvis vi kjenner løsningen på den positive a-aksen og fram til t_0 på t-aksen, kan vi vi bestemme løsningen for alle t ved å gå langs karakteristikkene og løse fødselsintegralet etterhvert.

Etter andre verdenskrig opplevde Norge en baby-boom. En baby-boom som inntreffer i origo vil i sin tur påvirke fødselstallene for alle tidspunkt mellom $a_u + t_0$ og $a_g + t_0$, og dette vil gjentas videre, men siden intervallet mellom a_u og a_g er mye større enn tidsrommet for baby-boomen, vil virkningen smøres utover i tid etterhvert og dermed ikke bli så markert. Det er godt mulig også å ha en stasjonær alderfordeling $p_0(a)$ hvis for eksempel $q = 0$ og

$$p_0(a) = P_0 \exp(-a^2/2),$$
$$\int_{a_u}^{a_g} f(a) e^{-a^2/2} da = 1. \tag{19}$$

Dette er ellers ikke eneste mulighet. Hvis

$$m(a) = \begin{cases} 0, & a \le a_0, \\ \infty, & a_0 < a, \end{cases} \tag{20}$$

vil $p(a,t) = C$ for $0 \le a \le a_0$ være en løsning hvis $a_g < a_0$ og

$$\int_{a_u}^{a_g} f(a) da = 1.$$

Neste steg i analysen vil nå være å sette inn virkelige aldersfordelinger og reelle data for mortalitet og innvandring. En numerisk implementasjon vil være rimelig enkel. Et eksempel på utviklingen er vist i figur 2, der vi for enkelhets skyld har antatt et konstant antall nyfødte.

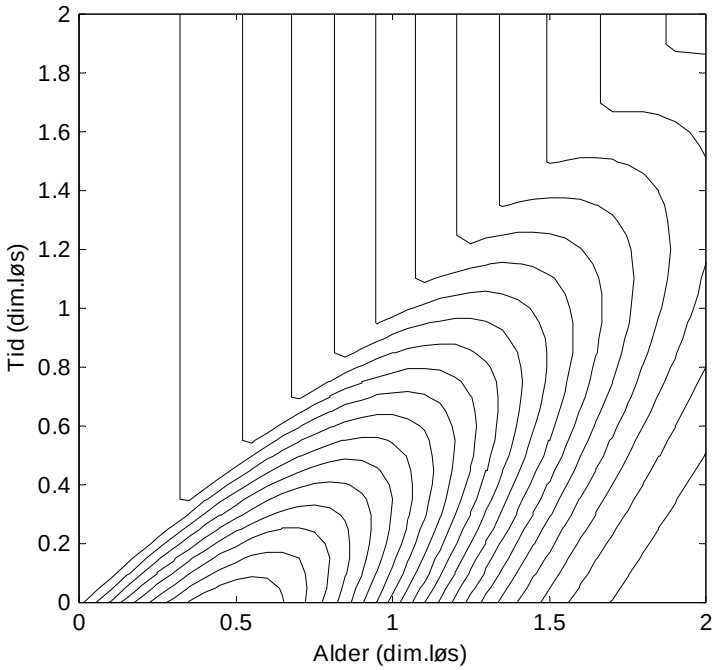


Figure 2: Eksempel på tidsutvikling av aldersfordeling med funksjonene ovenfor. For $t = 0$ er $p(a, 0) = \exp(-2(a - .5)^2)$, og $p(0, t) = p(0, 0)$ (dvs. et konstant antall nyfødte pr. tidsenhet).

Dette eksemplet er på mange måter typisk for hvordan en stiller opp og gjør innledende analyse av modeller basert på bevarelsesprinsipper. Selve modellen er nært knyttet til realitetene, mens analysen ved hjelp av karakteristikker nok virker uvant i starten. Det er viktig å tenke geometrisk og se på karakteristikkene som informasjonsveier vi bruker for å skaffe oss oversikt over løsningen.